Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон миллий университети,

ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти,

Россия Фанлар Академияси Сибирь Бўлими
С.Л.Соболев номидаги Математика институти,

Дунё миқёсидаги Математик Марказ "Математический центр в Академгородке",

Новосибирск давлат университети.

МАТЕМАТИК ФИЗИКАНИНГ НОКЛАССИК ТЕНГЛАМАЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ТАДБИҚЛАРИ

академик Т.Ж.Жўраев таваллудининг 90 йиллигига бағишланган
Халқаро илмий конференция
Тошкент, 24–26 октябрь, 2024 йил

МАЪРУЗАЛАР ТЕЗИСЛАРИ

======== ♢ ========

Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,

Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз.,

Институт математики имени С.Л.Соболева
Сибирского Отделения РАН,

Математический центр Мирового уровня "Математический центр в Академгородке",

Новосибирский государственный университет.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Международная научная конференция
посвященная 90 летию со дня рождения академика Т.Д.Джураева
Ташкент, 24–26 октября, 2024 год

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

УДК 517.5 + 517.95 + 517.97 + 517.98 + 517.958 +517.968 + 519.6.

Неклассические уравнения математической физики и их приложения: Тезисы докладов международной научной конференции посвященной 90 летию со дня рождения академика Т.Д.Джураева (24–26 октября 2024 года,
Ташкент, Узбекистан). – Ташкент. Изд–во "Маърифат". 2024. 276 с.

Данный сборник содержат научные доклады участников международной научной конференции "Неклассические уравнения математической физики и их приложения" по следующим направлениям: неклассические задачи уравнений математической физики, вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа, дробное исчисления и их приложения, спектральная теория дифференциальных операторов, динамические системы, оптимальные управления и теория дифференциальных игр, обратные и некорректные задачи математической физики и анализа.

Данная конференция организована на основании распоряжения 16–Ф Министрство высшего образования, науки и инновациям Республики Узбекистан от 18 января 2024 года и приказом №01–43 ректора Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека от 8 февраля 2024 года.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Маджидов И.У. – председатель, ректор НУУз.,
Аюпов Ш.А. – сопредседатель, директор ИМ АН РУз.,
Эргашов Ё.С. – зам. председателя, проректор НУУз.,
Зикиров О.С. – зам. председателя, декан Матфака НУУз..

Члены организационного комитета

Апаков Ю.П. (Наманган),
Балтаева У.И. (Ургенч),
Газиев К.С. (Фергана),
Дурдиев Д.К. (Бухара),
Карачик В.В. (Челябинск),
Матвеева И.И. (Новосибирск),
Паровик Р.И. (Петропавловск-Камчатск),
Тахиров Ж.О. (Ташкент),
Хаётов А.Р.(Ташкент),
Хажиев И.О. (Ташкент),
Юлдашев Т.К. (Ташкент),
Артюшин А.Н. (Новосибирск),
Бердышев А.С.(Алматы),
Джамалов С.З. (Ташкент),
Исломов Б.И. (Ташкент),
Мамадалиев Н. (Ташкент),
Мирсабуров М. (Термез),
Рахмонов З.Р. (Ташкент),
Тураев Р.Н. (Термез),
Хашимов А.Р. (Ташкент),
Холиков Д.К. (Ташкент),
Юлдашева А.В. (Ташкент)

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Сопредседатели:
Алимов Ш.А. – академик АН РУз., (Ташкент, Узбекистан),
Кожанов А.И. – профессор, ИМ СО РАН (Новосибирск, Россия).

Члены программного комитета

Азамов А. – академик АН РУз., (Ташкент, Узбекистан),
Арипов М.М. – профессор (Ташкент, Узбекистан),
Ашуров Р.Р. – профессор (Ташкент, Узбекистан),
Демиденко Г.В. – профессор (Новосибирск, Россия),
Дженалиев М.Т. – профессор (Алматы, Казахстан),
Егоров И.Е. – профессор (Якутск, Россия),
Имомназаров Х.Х. – профессор (Новосибирск, Россия),
Кальменов Т.Ш. – академик НАН РК (Алматы, Казахстан),
Кожобеков К.Г. – профессор (Ош, Кыргызстан),

ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ:

Национальный университет
Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Математический центр мирового уровня
"Математический центр в Академгородке"

Новосибирский государственный университет

КОНФЕРЕНЦИЯ ПРОВОДИТСЯ ПРИ ПОДДЕРЖКЕ:

Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации

"Фонд поддержки развития математики и математического образования" при Институте математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Научно-методического центра "Академик Кори-Ниязов мероси", г. Ташкент

Математическое общество Узбекистана

ООО "Modern Project Service Group", Ферганская область

“Samarqand viloyat futbol assotsiatsiyasi” Самаркандская область

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИГЛАШЕННЫЕ ДОКЛАДЫ
INVITED LECTURES

СЕКЦИОННЫЕ УСТНЫЕ И СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ
SHORT COMMUNICATIONS AND POSTERS

академик

ТУХТАМУРАД ДЖУРАЕВИЧ
Д Ж У Р А Е В
(25.10.1934 – 14.09.2009)

25 октября 2024 года исполняется 90 лет со дня рождения известного ученого–математика, специалиста по дифференциальным уравнениям и математическим задачам механики, доктора физико-математических наук, профессора, заслуженого деятеля науки Республики Узбекистан, лауреата Государственной премии им. Беруни, общественного и государственного деятеля науки и образования Узбекистана, академика Тухтамурада Джураевича Джураева.

ТУХТАМУРАД ДЖУРАЕВИЧ ДЖУРАЕВ

(к 90 – летию со дня рождения)

(Краткий обзор научной и общественной деятельности)

Тухтамурад Джураевич Джураев принадлежит к числу ученых, внесших значительный вклад в развитие математической науки. Он оставил неизгладимый след не только как ученый, но и как крупный организатор науки и высшего образования в Республике Узбекистан.

Т.Д.Джураев родился 25 октября 1934 года в селе Шурали-сай Янги-Юльского района Ташкентской области. В 1953 г., после успешного завершения учебы в средней школе, он поступил на математическое отделение физико-математического факультета Среднеазиатского Государственного университета (САГУ, ныне - Национальный университет Узбекистана), который окончил с отличием в 1958 г. В том же году он продолжил учебу в аспирантуре САГУ, а в 1959 г. в аспирантуре Института математики СО РАН. В годы аспирантуры (1958-1961 гг.) Т.Д.Джураев под руководством академика А.В.Бицадзе специализировался по теории уравнений математической физики. Применяя методы теории функций комплексного переменного, он изучил ряд начально-краевых задач для уравнений составного и смешанно-составного типов. Тогда он получил важные научные результаты, посвященные теории уравнений высокого, в частности третьего порядка. Эти работы были положены в основу его кандидатской диссертации, которую он защитил позже в 1962 г.

С 1961 по 1965 гг. Т.Д.Джураев работал в Институте математики имени В.И.Романовского АН РУз на должностях младшего, старшего научного сотрудника, ученого секретаря (1965-1966 гг.), затем заведующего отделом дифференциальных уравнений (1966-1974 гг.).

В этот период среди научных направлений теоретической и прикладной математики, Т.Д.Джураева особенно привлекали математические задачи теории пограничного слоя, описываемые системами уравнений Прандтля стационарных и нестационарных течений как несжимаемой, так и сжимаемой жидкостей. Интенсивные исследования, начатые им в 1966 г. и проводимые в этом направлении, были завершены в семидесятых годах созданием теории сильно вырождающихся параболических уравнений в ограниченной и бесконечной (неограниченной) областях. В этих исследованиях был выявлен новый эффект влияния младших членов уравнения на правильную постановку краевых задач, что в свою очередь, позволяло установить качественные закономерности движения жидкости и распределения температуры при малой вязкости.

В 1972 г. Т.Д.Джураев защищает докторскую диссертацию, а в 1974 г. его утверждают на звание профессора. В 1979 г. его избирают членом-корреспондентом, а в 1989 г. - действительным членом Академии наук Узбекистана.

В 1974-1985 годах он работал директором Института механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т.Уразбаева АН РУз. Работая директором Института, он оказал благотворное влияние на формирование многих ученых математиков и механиков. Значительно укрепился научный потенциал, существенно расширился круг фундаментальных и прикладных исследований, а также активизировались международные научные связи института.

Возглавляя Ташкентский научный Центр (1982-1987 гг.), Т.Д.Джураев объединял усилия академических и отраслевых институтов, вузов и проектно-конструкторских организаций, предприятий хозяйств по разработке актуальных научно-технических проблем и внедрению их результатов в народное хозяйство.

Т.Д.Джураев в течение 1985-1992 гг. и 1997-2003 гг. руководил Институтом математики им. В.И. Романовского АН РУз. Здесь Тухтамурад Джураевич возглавлял отдел "Неклассические уравнения математической физики где подготовил большое количество научных кадров. К этому времени, Т.Д.Джураев становится общепризнанным руководителем известной научной школы по неклассическим уравнениям математической физики.

Т.Д.Джураевым проведено систематическое изучение уравнений смешанного эллиптико-гиперболического, эллиптико-параболического и параболо-гиперболического типов, а также впервые поставлены и изучены краевые задачи с неизвестной линией изменения типа для смешанных параболо-гиперболических уравнений, причем для этих типов уравнений его исследования являются основополагающими.

Изучен широкий класс краевых задач для уравнений третьего и четвертого порядков с кратными характеристиками и составного типа, причем в этих работах впервые исследуются нелинейные уравнения.

Значительная часть этих исследований собрана в его монографиях "Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов"(Ташкент, "Фан 1979), "Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа"(Ташкент, "Фан 1986) и "К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка"(Ташкент, "Фан 2000).

С 1992 по 1995 гг. Т.Д.Джураев был ректором Ташкентского государственного университета (ТашГУ - старейший университет Средней Азии, ныне Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека). По совместительству он руководил отделом "Неклассические уравнения математической физики"Института математики АН Республики Узбекистан.

Этой деятельности он придавал большое значение, исключительное внимание уделял развитию учебно-воспитательной и научно-исследовательской работе, расширению и укреплению международных связей ТашГУ. Были открыты новые факультеты и созданы новые кафедры, укрепился кадровый потенциал университета.

В 1995 г. Т.Д.Джураев избирается Президентом Академии наук Республики Узбекистан. На этом посту, знаменовавшем признание научного и организаторского таланта Тухтамурада Джураевича, он работал до 2000 г.

Научные и научно-педагогические заслуги академика Т.Д.Джураева снискали международное признание. Он был иностранным членом Американского математического общества. В 1994 г. был избран академиком Международной Академии высшей школы (Россия), а в 1997 г. академиком Международной Академии наук, образования, промышленности и искусства (США), в 1998 г. - академиком Международной Академии культуры и знания имени Ататюрка (Турция).

Тухтамурад Джураевич успешно сочетал широкую педагогическую и общественную деятельность, с должностями председателя Проблемного совета "Математика"при АН РУз, главного редактора "Узбекского математи-ческого журнала Президента Узбекского математического общества, председателя специализированных советов по защите докторских и кандидатских диссертаций, которые он возглавлял в разные годы как в Институте механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, так и в ТашГУ и Институте математики АН РУз.

Т.Д.Джураев всегда уделял особое внимание на подготовку и воспитание молодых математиков: Под его руководством были защищены 9 докторских и более 40 кандидатских диссертаций. Ученики Т.Д.Джураева работают во многих городах Узбекистана, России, Польши, Китая, Казахстана, Киргизии, Туркменистана.

Т.Д.Джураев является автором трех монографий, трех учебников для вузов и более 300 научных работ, опубликованных в международных и республиканских изданиях.

За большие заслуги в проведении научных исследований Т.Д.Джураев в 1971 г. был награжден орденом Трудового Красного Знамени. В 1974 г. за цикл научных исследований по теории уравнений в частных производных ему была присуждена Государственная премия имени Беруни. В 1991 г. ему было присвоено звание "Заслуженный деятель науки Узбекистана". В 1996 г. был награжден орденом "Дустлик а в 1999 году - орденом "Мехнат шухрати".

Тухтамурад Джураевич неоднократно представлял математическую науку Узбекистана зарубежом, выступал с научными докладами на международных конференциях, симпозиумах и конгрессах.

Т.Д.Джураев с 1992 по 1994 гг. был народным депутатом Узбекистана, а с 1994 по 1999 гг. депутатом Олий Мажлиса Республики Узбекистан.

Тухтамурад Джураевич прожил яркую плодотворную жизнь (25.10.1934–14.09.2009). Принципиальный и справедливый, он обладал способностью искренне радоваться новым научным идеям и результатам своих коллег и учеников, и всегда стремился поддержать всч новое.

Вся многогранная жизнь этого замечательного ученого, интеллигента с широком кругозором, верного своим жизненным принципам, будет служить примером служения науке и своему народу.

Друзья, коллеги и ученики.

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ
PLENARY LECTURE

ON A NEW FORMULATION OF THE INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE ORDER OF FRACTIONAL DERIVATIVES IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ashurov R. R.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
ashurovr@gmail.com

In the last decade, the inverse problem of determining the unknown order of a fractional derivative in differential equations has been actively studied by many specialists. A number of interesting results have been obtained that have a certain applied significance. By now, the authors have investigated various modifications of this inverse problem: determining the order of the derivative or, along with the unknown order, determining some other unknown parameter or function included in the initial-boundary value problem under consideration. Analyzing the known results, we can conclude that in all these works, firstly, only the subdiffusion equation was considered and, secondly, the elliptic part of these equations has a discrete spectrum, and the authors were able to prove only the uniqueness of the solution to the inverse problem under consideration.

This report will give a brief overview of the most interesting works in this area, and will propose a new formulation and methods for solving these inverse problems. It will be proven that in the new formulation the solutions to inverse problems are not only unique, but also exist. Moreover, not only the subdiffusion equations will be considered, but also the fractional-wave equation, the Rayleigh-Stokes equations, and some mixed-type equations. In all these cases, the elliptic part of the equation is also allowed to have a continuous spectrum.

PROTTER - MORAWETZ MULTIDIMENSIONAL BVP, EXPONENTIAL TYPE SINGULARITY OF THE GENERALIZED SOLUTIONS

Popivanov N.

Institute of Information and Communication Technologies Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria
nedyu@fmi.uni-sofia.bg

About sixty years ago Murray Protter proposed some multi-dimensional analogues of the classical Guderley-Morawetz problem for mixed-type hyperbolic-elliptic equations on the plane that models transonic flows in fluid dynamics. Let mention that the Guderley-Morawetz problem in the 2D case was studied by Morawetz, Lax and Phillips. The multidimensional statement of this problem now is known as Protter - Morawetz problem. Together with this statement M. Protter also gives some multidimensional analogues of such kind of problems for the wave equation. It appeared later that in all such cases the Protter - Morawetz problem is strongly over determined in the classical statement for wave equation, as well as for Tricomi or Keldysh type equations.

According to this situation in the case of the (3+1)-D wave equation we will present some results in the frame of generalized solution statements, that allow a high order of singularity (power type or even an exponential one). We have already published some of them in [1]. There we construct an infinitely smooth right-hand side function, for which the unique generalized solution has an exponential growth at one point O of the boundary. This singularity is fixed on the vertex O of the light cone and dos not propagate along the cone away of O.

We shall discussing also some other type of questions:

1. Is it possible to extend the generalized solution outside of the wave cone which could explain such kind of singularity? The answer is positive in the case of power type singularity.

2. What kind of extensions appear in the case of exponential growth of singularity, when it is not possible to work in the distribution frame?

3. Can be constructed analogous right-hand side functions in the case of Tricomi or Keldish type equations with so strong singular generalized solution?

The talk is based on the joint work with Ingo Witt, University of Göttingen, and Todor Popov, University of Sofia.

References

1. N. Popivanov, T. Popov, I. Witt, Solutions with exponential singularity for (3+1)-D Protter problems, Journal of Hyperbolic Differential Equations, Vol. 20, №. 02, pp. 475–498 (2023), https://doi.org/10.1142/S0219891623500145.

О ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Волков Ю. С.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,
volkov@math.nsc.ru

В докладе рассказывается о классических результатах в теории интерполяции кубическими сплайнами, о проблеме И.Шцнберга и знаменитой проблеме К. де Бора, вопросах вычисления сплайнов и результатах сходимости процессов интерполяции. Интерполяция сплайнами на отрезке и кардинальная интерполяция (на всей вещественной прямой с равномерными узлами) достаточно хорошо изучены. Если же сетка точек интерполяции бесконечная и неравномерная, то таких исследований немного. К. де Бор (1976) доказал существование единственного ограниченного сплайна для ограниченных данных при условии ограниченности отношения наибольшего и наименьшего шагов сетки, а в случае кубических сплайнов установил разрешимость этой задачи при ограничении на отношение соседних шагов сетки. Также в терминах ограничений на отношения соседних шагов сетки Фридланд и Миккелли (1978) рассмотрели задачу существования и единственности ограниченного сплайна произвольной степени. Некоторые достаточные условия существования и единственности сплайна полиномиального роста при интерполировании данных полиномиального роста были получены Якимовским (1984), и это также было сделано при некоторых ограничениях на сетку.

Рассмотрена задача интерполяции кубическими сплайнами функций линейного и квадратичного роста на произвольных неравномерных сетках на всей вещественной оси. Установлено [1], что в этом случае всегда существует единственный кубический сплайн линейного или квадратичного роста соответственно, причцм ограничения на сетку не требуются. Кроме того, мы приводим оценки погрешности на классах интерполируемых функций $W^4_\infty(\mathbb{R})$ и при этом оказывается, что оценки для бесконечных сеток на оси совпадают с известными оценками погрешности в случае конечного отрезка.

Исследование основано на результатах разрешимости и оценки решения бесконечных в обе стороны систем линейных уравнений, матрицы которых обладают диагональным преобладанием. Установлено, что хорошо известные для случая конечных систем линейных уравнений оценки нормы решения через величину диагонального преобладания являются справедливыми и для дважды бесконечных систем уравнений. Эти результаты использованы в задаче интерполяции кубическими сплайнами на прямой.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF–2022–0015.

Литература

1. Волков Ю.С., Новиков С.И. Оценки решений бесконечных систем линейных уравнений и задача интерполяции кубическими сплайнами на прямой //Сиб. матем. журн. 2022. Т.63, №4. С. 814–830.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Демиденко Г. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
demidenk@math.nsc.ru

Работа посвящена теории краевых задач для класса дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной

$$\mathcal{L}_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{L}_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x), \tag{1}$$

где $\mathcal{L}_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор, $\mathcal{L}_1(D_x),\ldots,\mathcal{L}_l(D_x)$ — дифференциальные операторы по $x \in R^n$. Мы будем предполагать, что символ главной части дифференциального оператора однороден относительно вектора $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $1/\alpha_j \in N$, $j \geq 1$, и оператор является строго псевдогиперболическим [1].

Уравнения вида (1) часто называют уравнения типа Соболева, поскольку работы С. Л. Соболева (1943) были первыми глубокими исследованиями уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. В работах С. Л. Соболева были изучены задача Коши, первая и вторая краевые задачи для систем малых колебаний вращающейся идеальной жидкости [2, pp. 279–332]. С. Л. Соболев сформулировал ряд новых проблем математической физики (см. [2, с. 279–396]).

Монография [1] посвящена общей теории уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. В этой монографии была дана классификация уравнений вида (1) и изучена проблема разрешимости краевых задач в соболевских пространствах. В частности, в [1, гл. 2] введен класс псевдогиперболических уравнений, и начато изучение задачи Коши. Продолжение этих исследований см., например, [3–5].

В этой работе мы приведем результаты о разрешимости задачи Коши и смешанных краевых задач в четверти пространства для строго псевдогиперболических уравнений в различных шкалах весовых соболевских пространств.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00370.

Литература

1. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга. 1998.

2. Соболев С.Л. Избранные труды. Том 1: Уравнения математической физики, вычислительная математика. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал "Гео" Изд-ва СО РАН. 2003.

3. Demidenko G.V. The Cauchy problem for pseudohyperbolic equations // Selcuk J. Appl. Math. 2001. V. 1, No. 1. P. 47–62.

4. Демиденко Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.

5. Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В. О корректности задачи Коши для псевдогиперболических уравнений в весовых соболевских пространствах // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 895–911.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА НА КОЛЬЦЕ

Кальменов Т.Ш.[1,a], **Кадирбек А.**[2,b]

[1,2]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,
[a]kalmenov.t@mail.ru, [b]kadirbekayan5@gmail.com

В работе Кальменова Т.Ш., Сурагана Д. доказана, что потенциал Ньютона

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon(x,y) f(y) dy, \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$-\Delta_x u = f(x), \tag{2}$$

и граничному условию

$$N[u] = -\frac{u(x)}{2} + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_y}(x,y) u(y) - \varepsilon(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Обратно, если $u \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет задачу (2)-(3), то $u(x)$ – совпадает с Ньютоновым потенциалом (1), где $\Omega \subset R^n$ – односвязная область. Используя граничную усовию (3), авторы решили спектральную задачу для ньютонового потенциала на 2D-круге и 3D-шаре. Основной целью данной работы является исследование этого задач, когда $\Omega \subset R^2$ является кольцом.

Теорема 1. *Для любого $f \in L^2(\Omega)$ ньютонов потенциал (1) в $m+1$ - связной области $\Omega \subset R^n$ удовлетворяет уравнению Лапласа (2) со следующими нелокальными граничными условиями*

$$N_i[u] = -\frac{u(x)}{2} + \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{\partial\Omega_k} \left(\frac{\partial \varepsilon_n(x-\xi)}{\partial n_\xi} u(\xi) - \varepsilon_n(x-\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} \right) dS_\xi = 0,\ x \in \partial\Omega_i,\ i = \overline{0,m}.$$

Обратно, если $u \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет задачу (2)-(3), то $u(x)$ – совпадает с Ньютоновым потенциалом (1)

Теорема 2. *Собственные значения логарифмического потенциала на кольце являются корнями трансцендентных уравнений*

$$J_0\left(\sqrt{\lambda} r_0\right) - r_0 \ln \frac{r_1}{r_0} \left. \frac{dJ_0\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)}{d\rho} \right|_{\rho=r_0} = 0, \quad k = 0,$$

$$-J_0\left(\sqrt{\lambda} r_0\right) \left(1 + \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2k}\right) + \frac{r_0}{k} \left. \frac{dJ_k\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)}{d\rho} \right|_{\rho=r_0} \left(1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2k}\right) = 0, \quad k \neq 0,$$

из-за симметричности задачи, эти уравнения имеет бесконечное число корней, а собственные функции образуют полную ортонормированную систему.

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРЕМЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Кожанов А. И.

Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск, Россия
kozhanov@math.nsc.ru

Изучается разрешимость в анизотропных пространствах С.Л. Соболева краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно временной (выделенной) переменной, в том числе вырождающихся. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений — решений, имеющих все обобщенные производные входящие в соответствующее уравнение.

В изучаемый класс дифференциальных уравнений входят линеаризованные уравнения трансзвуковой газовой динамики Ляня–Рейснера –Цзяня, линеаризованные уравнения Кадомцева–Петвиашвили, некоторые другие уравнения математической физики.

Доклад подготовлен при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской федерации.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Пятков С. Г.

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия,
s_pyatkov@ugrasu.ru

Мы рассматриваем параболическое уравнение второго порядка вида

$$Mu = u_t - Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{1}$$

где $Lu = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} - a_0 u$, $G \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Ru|_S = g, \ u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

где $Ru = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j + \sigma_0(x,t) u$ и ν_i – координаты внешней единичной нормали к Γ.

Предполагается, что коэффициент σ_0 (коэффициент теплопередачи) имеет вид $\sigma_0 = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i(t) \Phi_i(t,x)$, где функции $\alpha_i(t)$ подлежат определению а функции $\{\Phi_i\}$ известны и по сути это некоторый базис.

Рассматриваются три вида дополнительных условий для определения функций $\{\alpha_i\}$:

$$\int\limits_{\Gamma} u(t,x) \varphi_i(x)\, d\Gamma = \psi_i(t), \ i = 1,2,\ldots,r. \tag{3}$$

$$\int\limits_{G} u(t,x) \varphi_i(x)\, d\Gamma = \psi_i(t), \ i = 1,2,\ldots,r. \tag{4}$$

$$u(t,y_j) = \psi_j(t), \ i = 1,2,\ldots,r, \tag{5}$$

где $\{y_j\}$ – некоторый набор точек лежащих в области G или на ее границе.

Таким образом, задача состоит в нахождении решения уравнения (1) и функций $\{\alpha_i\}$, удовлетворяющего краевым условиям (2) и одному из условий переопределения (3)–(5). Мы приводим условия, когда эти задачи корректны в классах Соболева $u \in W_p^{1,2}(Q)$, $\alpha_j \in W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(S)$ $(j = 1,2,\ldots,r, S = (0,T) \times \Gamma)$.

К ТЕОРИИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ И СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ ЯДРАМИ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Раджабов Н.[1], Раджабова Л. Н.[2]

[1]Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан,
[1]nusrat38@mail.ru1; [2]lutfya62@mail.ru

Через Ω обозначим цилиндрическую область $\Omega = \{(t,z) : a < t < b, |z| < R\}$. Боковую поверхность цилиндра обозначим через $S = \{a < t < b, |z| = R\}$ и его нижнее основание обозначим через $D = \{t = a, |z| < R\}$.

В области Ω рассмотрим переопределенную систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(t,z) + \lambda \int\limits_a^t \dfrac{\varphi(\tau,z)}{(\tau-a)^\alpha} d\tau = f(t,z), \\ \varphi(t,z) + \dfrac{1}{\pi} \iint\limits_D \dfrac{exp[i\theta][\mu_1\varphi(t,\zeta) + \mu_2\overline{\varphi(t,\zeta)}]}{(R-\rho)^\beta(\zeta-z)} d\xi d\eta = g(t,z), \end{cases} \tag{1}$$

где $\lambda = const$, $\mu_j (j = 1,2)$ – заданные вещественные постоянные, $f(t,z)$, $g(t,z)$ – заданные функции области Ω, $\varphi(t,z)$ – искомая функция, $\Theta = \arg\zeta$, $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\alpha = const \geq 1$, $\beta = const \geq 1$.

Решение системы (1) будем искать в классе функций $\varphi(t,z) \in C(\bar{\Omega})$, $\varphi(a,z) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(t,z) = o[(t-a)^{\delta_1}], \delta_1 > \alpha - 1,$$

при $t \to a$ и $\varphi(t, Re^{i\Theta}) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(t,z) = O(R-r)^{\delta_2}\delta_2 > \beta - 1,$$

при $r \to R$.

В работе для модельной нелинейной переопределенной системы интегральных уравнений (1) в зависимости от $\alpha(\alpha = 1, \alpha > 1)$, $\beta(\beta = 1, \beta > 1)$ и значений λ, μ_1, μ_2 в случае $\varphi(t,z) = \varphi(t,r)$ получено представление многообразия решений через одну произвольную вещественную постоянную. Изучены свойства полученных решений. На этой основе ставятся и исследуются граничные задачи типа Коши.

Литература

1. Раджабов Н. Переопределенная линейная система трех интегральных уравнений Вольтерровского типа с тремя сингулярными областями//Известия НАН Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2021. №3 (189). – С.46-61.

2. Раджабов Н. Переопределенная линейная система двух интегральных уравнений Вольтерровского типа с двумя фиксированными граничными сингулярными линиями в ядре // Материалы междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики и физики посвященной 70-летию чл. корреспондента АНРБ К.Б. Сабитова (12-15 сентября 2021, г. Стерлитамак), 2021.-С.85-90.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА, МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ

Сабитов К. Б.[1,2]
[1]Институт механики УФИЦ РАН, Уфа, Россия,
[2]Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия,
sabitov_fmf@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$\mathcal{L}u = u_{zz} + (\mathrm{sgn} z)(u_{xx} + u_{yy}) = F(x, y, z) \tag{1}$$

в области $Q = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, -\alpha < z < \beta\}$, $D = \{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < q\}$, где α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, и поставим следующую краевую задачу на сопряжения на плоскости изменения типа, которую назовем задачей Дирихле.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y, z) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q_+ \cup Q_-), \;\; u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} \in L(D); \tag{2}$$

$$\mathcal{L}u(x, y, z) \equiv F(x, y, z), \quad (x, y, z) \in Q_+ \cup Q_-; \tag{3}$$

$$u(x, y, z)\big|_{x=0} = u(x, y, z)\big|_{x=p} = u(x, y, z)\big|_{y=0} = u(x, y, z)\big|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \le z \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x, y, z)\big|_{z=-\alpha} = \psi(x, y), \quad u(x, y, z)\big|_{z=\beta} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \tag{5}$$

где $F_i(x, y, z)$, $i = 1, 2$, $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяют условиям согласования с граничными данными (5), $Q_+ = Q \cap \{z > 0\}$, $Q_- = Q \cap \{z < 0\}$.

Интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа возник после работы Франкля Ф.И. где впервые было показано, что задача перехода через звуковой барьер установившихся двумерных безвихревых течений идеального газа в соплах, когда сверхзвуковые волны примыкают к стенкам сопла вблизи минимального сечения, сводится к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа. Первые постановки аналога задачи Трикоми для трехмерного уравнения типа (1) принадлежат А.В. Бицадзе, С.П. Пулькину. В данной работе показано, что корректность постановки задачи (2) – (5) существенным образом зависит от длин ребер p, q и α параллелепипеда Q_- гиперболической части области Q. Установлен критерий единственности решения этой задачи. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило доказать сходимость ряда в классе регулярных решений и устойчивость решения относительно граничных функций.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Солдатов А.П.

Федеральный исследовательский центр
"Информатика и управление" РАН, Москва, РФ
soldatov48@gmail.com

Рассмотрим строго гиперболическую систему

$$\frac{\partial u}{\partial y} - A\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

с постоянной матрицей $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, все собственные значения $\nu_j,\ 1 \le j \le n$, вещественны и различны. Для этой системы в ограниченной кусочно–гладкой области предложена новая корректная краевая задача.

Пусть область D ограничена кусочно – гладким контуром Γ, составленным из гладких нехарактеристических дуг $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{2n}$, занумерованных в порядке обхода контура против часовой стрелки. Предполагается, что проектирование вдоль каждого характеристического направления переводит кривую $\Gamma_{(1)} = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{2n-1}$ на $\Gamma_{(2)} = \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_{2n}$.

Для заданного $1 \le m \le n$ рассмотрим для системы (1) краевую задачу вида

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} a_{ki}u_i\big|_{\Gamma_{(1)}} = f_k,\ 1 \le k \le m, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ki}u_i\big|_{\Gamma_{(2)}} = f_k,\ m+1 \le k \le n, \end{gathered} \tag{2}$$

где коэффициенты a_{ki} непрерывны на соответствующих кривых $\Gamma_{(1)}$ и $\Gamma_{(2)}$.

В работе описаны условия на коэффициенты a_{ki} и граничные дуги Γ_j, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (1), (2).

Литература

1. Жура Н.А., Солдатов А.П. Задача типа Римана–Гильберта для гиперболической системы на плоскости// Дифференц. уравнения, 2019, том 55, №6. –С. 831–839

2. Солдатов А.П. Характеристически замкнутые области для строго гиперболических систем первого порядка на плоскости// Проблемы математического анализа, 2018, том 93. –С. 131–135.

3. Жура Н.А., Солдатов А. П., Краевые задачи для строго гиперболических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в двумерной области// Известия РАН (сер. матем.) 2017, Т. 81, 3, С. 83-108

УРАВНЕНИЯ НА $\mathbb{R}$ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ДВУСТОРОННЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Федоров В. Е.[1], Шишацкая П. А.[2], Скрипка Н. М.[3]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия,
[1] kar@csu.ru; [2]polinachka2003@icloud.com [3]vio.nadezhda@ya.ru

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $C^l_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{Z}) := \{x \in C^l(\mathbb{R};\mathcal{Z})$: при $\varepsilon > 0$ $e^{-(a+\varepsilon)t}x^{(k)}(t)$ ограничено при $t > 0$ и $e^{-(b+\varepsilon)t}x^{(k)}(t)$ ограничено при $t < 0$, $k = 0, 1, \ldots, l\}$, $C_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{Z}) := C^0_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{Z})$. Аналогично определим $C^l_{a,b}(\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$ при $l \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$, $C_{a,b}(\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, где $\mathbb{R}_- := \{c \in \mathbb{R} : c < 0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{c \in \mathbb{R} : c > 0\}$,.

При $m \in \mathbb{N}$, рассмотрим уравнение

$$z^{(m)}(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с оператором $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ (линейный и ограниченный), $f \in C_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{Z})$ при некоторых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Функция $z \in C^m(\mathbb{R};\mathcal{Z}) \cap C^{m-1}_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{Z})$, удовлетворяющая равенству (1), называется решением этого уравнения. Обозначим символом $\mathfrak{L}_2$ двустороннее преобразование Лапласа [1].

Лемма 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $c \in (a, b)$,*

$$Z_m(t) := \text{v.p.}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_c} (\lambda^m - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\Gamma_c := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = c + iy,\, y \in \mathbb{R}\}$ — контур Бромвича. Тогда

(i) для $a > \|A\|^{1/m}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ $\mathfrak{L}_2[Z_m](\mu) = (\mu^m - A)^{-1}$, $Z_m(t) = 0$ при $t < 0$, для любого $b > a$ $Z_m \in C^{m-2}_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathcal{Z})) \cap C^{m-1}_{a,b}(\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z})) \cap C^\infty(\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, $Z^{(k)}_m(0+) = 0$ при $k = 0, \ldots, m-2$, $Z^{(m-1)}_m(0+) = I$;

(ii) для $b < -\|A\|^{1/m}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$, $\mathfrak{L}_2[Z_m](\mu) = (\mu^m - A)^{-1}$, $Z_m(t) = 0$ при $t > 0$, для любого $a < b$ $Z_m \in C^{m-2}_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathcal{Z})) \cap C^{m-1}_{a,b}(\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z})) \cap C^\infty(\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ $Z^{(k)}_m(0-) = 0$ при $k = 0, \ldots, m-2$, $Z^{(m-1)}_m(0-) = I$.

Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $a < b < -\|A\|^{1/m}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ или $\|A\|^{1/m}_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} < a < b$, $f \in C^1_{a,b}(\mathbb{R};\mathcal{Z})$. Тогда функция*

$$z_f(t) := (Z_m * f)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z_m(t-s)f(s)ds$$

является единственным решением уравнения (1).

Литература

1. LePage W.R. Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers. New York: Dover Publ., 1961.

ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ОСТРЫМ УГЛОМ МЕЖДУ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И ГРАНИЦЕЙ

Хлуднев А. М.

Институт гидродинамики им.М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,

khlud@hydro.nsc.ru

В докладе рассматривается задача о равновесии упругого тела с тонким жестким включением, пересекающим внешнюю границу тела под нулевым углом. Предполагается, что включение отслаивается от окружающего упругого материала, что обеспечивает наличие межфазной трещины. Чтобы избежать нефизического взаимопроникания противоположных берегов трещины, мы накладываем ограничения типа неравенства. Более того, граничные условия на берегах трещины зависят от положительного параметра повреждаемости, описывающего сцепление между берегами трещин.

Доказано существование решения задачи с различными краевыми условиями на внешней границе при фиксированном параметре повреждаемости. Проанализированы предельные переходы при стремлении параметра повреждаемости к бесконечности и к нулю.

Литература

1. Khludnev A.M. Elasticity problem with a cusp between thin inclusion and boundary //Axioms. 2023. V.12, №12. 1081.

2. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. Москва.: Физматлит, 2010.

ПРИГЛАШЕННЫЕ ДОКЛАДЫ
INVITED LECTURES

CONSTRUCTION OF BIFURCATION DIAGRAMS FOR SELKOV'S FRACTIONAL DYNAMIC SYSTEM

Parovik R. I.

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, v. Paratunka, Russia, parovik@ikir.ru

Consider the following nonlinear dynamic system:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} x\left(t\right) = -v_1\left(t\right) x\left(t\right) + w_1\left(t\right) y\left(t\right) + h\left(t\right) x^2\left(t\right) y\left(t\right), x\left(0\right) = x_0, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} y\left(t\right) = v_2\left(t\right) - w_2\left(t\right) y\left(t\right) - h\left(t\right) x^2\left(t\right) y\left(t\right), y\left(0\right) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

where $x\left(t\right), y\left(t\right) \in C^1\left[0, T\right]$ are the solution functions, $v_1\left(t\right) = \theta^{1-\alpha_1(t)}$, $v_2\left(t\right) = v_0\theta^{1-\alpha_2(t)}$, $w_1\left(t\right) = w_0\theta^{1-\alpha_1(t)}, w_2\left(t\right) = w_0\theta^{1-\alpha_2(t)}, h_1\left(t\right) = h_0\theta^{1-\alpha_1(t)}, h_2\left(t\right) = h_0\theta^{1-\alpha_2(t)}$ — functions from the class $C\left[0, T\right]$, θ — a parameter having the dimension of time, v_0, w_0, h_0 — given constants, $t \in \left[0, T\right]$ — coordinate responsible for the current time of the process, $T > 0$ — constant, simulation time; x_0, y_0 — given positive constants; fractional differentiation operators are understood in the sense of Gerasimov-Caputo of orders $0 < \alpha_1\left(t\right), \alpha_2\left(t\right) < 1$ and are defined according to [1]:

$$\partial_{0t}^{\alpha_1(t)} x\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_1\left(t\right)\right)} \int\limits_0^t \frac{\dot{x}\left(\tau\right) d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha_1(t)}}, \partial_{0t}^{\alpha_2(t)} y\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_2\left(t\right)\right)} \int\limits_0^t \frac{\dot{y}\left(\tau\right) d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha_2(t)}},$$

where $\alpha_1\left(t\right), \alpha_2\left(t\right) \in C\left[0, T\right]$.

In the work, using previously developed algorithms in the articles [1-3], algorithms for constructing bifurcation diagrams were developed to study the dynamic modes of the fractional Selkov system (1).

The research was carried out within the framework of the Russian Science Foundation grant № 22-11-00064 on the topic modelling of dynamic processes in the geospheres taking into account heredity: (https://rscf.ru/project/22-11-00064/).

References

1. Parovik, R. I. Studies of the Fractional Selkov Dynamical System for Describing the Self-Oscillatory Regime of Microseisms. Mathematics, 2022. Vol. 10, №. 22. 4208. DOI 10.3390/math10224208.

2. Parovik R.I. Selkov Dynamic System with Variable Heredity for Describing Microseismic Regimes. Solar-Terrestrial Relations and Physics of Earthquake Precursors: Proceedings of the XIII International Conference, Paratunka, Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2023. pp. 166-178. DOI: 10.1007/978-3-031-50248-4_18.

3. Parovik R. I. Qualitative analysis of Selkov's fractional dynamical system with variable memory using a modified Test 0-1 algorithm. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2023. vol. 45. №. 4, 9-23. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-45-4-9-23.

КОМПЛЕКС СИМВОЛЬНО-ЧИСЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОДИНАМО

Водинчар Г. М., Фещенко Л. К.

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Камчатский край, Россия

gvodinchar@ikir.ru

В задаче геодинамо рассматривается магнитогидродинамическая конвекция проводящей вязкой несжимаемой жидкости во вращающейся сферической оболочке (жидкое ядро Земли) с твердыми границами [1]. При построении спектральных моделей используют представления полей скорости $\mathbf{v}$, температуры T и магнитной индукции $\mathbf{B}$ в виде разложений $\mathbf{v} = \sum_{l=1}^{L} \beta_l(t)\mathbf{v}_l(\mathbf{r})$, $T = \sum_{s=1}^{S} \alpha_s(t)T_s(\mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \sum_{p=1}^{P} \gamma_p(t)\mathbf{B}_p(\mathbf{r})$ по модам свободного затухания этих полей, т.е. по собственным модам спектральных задач

$$\mu\mathbf{v} - \nabla p + \Delta\mathbf{v} = 0, \nabla\mathbf{v} = 0, \quad \lambda T + \Delta T = 0, \quad \eta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B} = 0, \nabla\mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

с соответствующими граничными условиями. Подстановка разложений в уравнения геодинамо и применение процедуры методы Галеркина дает систему уравнений для амплитуд. Эта система вместе с набором мод и образует спектральную модель [2].

Явные выражения для решений задач (1), уравнений на собственные значения и нормировочных коэффициентов мод известны, однако они сложным образом выражаются через сферические функции Бесселя, сферические гармоники и интегралы от них. Коэффициенты Галеркина представляют собой объемные интегралы от очень сложных мультипликативных комбинаций базисных мод и операторов векторного анализа в сферических координатах. Поэтому при численном расчете параметров мод и коэффициентов проблематичен даже безошибочный ввод в программу уравнений для собственных значений, подынтегральных выражений для нормировочных и галеркинских коэффициентов. Необходимо также отметить, что с физической точки зрения важно знать какие из коэффициентов Галеркина в точности нулевые. Это позволяет выявлять цепочки взаимодействующих мод.

В докладе представлена вычислительная технология расчета параметров мод и коэффициентов моделей в которой средствами систем компьютерной алгебры сначала формируются необходимые подынтегральные выражения и уравнения, а затем выполняется комбинированный численно-аналитический расчет коэффициентов. Эта технология дает возможность выявлять и нулевые коэффициенты Галеркина.

Работа выполнена за счет проекта РНФ 22-11-00064 «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности».

Литература

1. Merril R., McElhinny M., McFadden P. The Magnetic Field of the Earth. N.Y.: Acad. Press, 1996.

2. Vodinchar G., Feshchenko L. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System // Mathematics. 2023. Vol. 11. №13. 3000.

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО БИГАРМОНИЧЕНСКОГО ОПЕРАТОРА В КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ

Дженалиев М. Т.[1], **Ергалиев М. Г.**[1,2], **Иманбердиев К. Б.**[1,2], **Орынбасар Б.**[1]
[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан, muvasharkhan@gmail.com;
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, e-mail2@address2

В работе найдены собственные значения и собственные функции для одного возмущенного бигармонического оператора $(\partial_x^4 + \partial_y^4)u \equiv [(-\Delta)^2 - 2\partial_x^2\partial_y^2]u = \lambda^2(-\Delta)u$ в квадратной области $\Omega = \{0 < x, y < l\}$ с условиями Дирихле $u = \partial_{\vec{n}} u = 0$ на границе квадрата $\partial\Omega$. Установлено сравнение найденных собственных значений с собственными значениями спектральной задачи для бигармонического оператора $(-\Delta)^2 u = \lambda^2(-\Delta)u$ с условиями Дирихле на границе. Заметим, что последняя задача возникает при изучении колебаний изгиба зажатой квадратной пластины и имеет приложения в двумерных граничных задачах Стокса, описывающих движение жидкости, строительной механике, судостроении и т.д. [1–6].

Исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (гранты BR20281002 и AP23485369).

Литература

1. Gould S.H. Variational Methods for Eigenvalue Problems, 2nd ed. London: Oxford University Press, 1966.

2. Ладыженская О.А. Математическая вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, второе изд. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970.

3. Lions J.-L. Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems. New-York: Gordon and Breach, 1969.

4. Temam R. Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979.

5. Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Yergaliyev M.G. On the numerical solution of one inverse problem for a linearized two-dimensional system of Navier-Stokes equations //Opuscula Math. 2022. V.42, №5. P. 711–727.

6. Jenaliyev M.T., Bektemesov M.A., Yergaliyev M.G. On an inverse problem for a linearized system of Navier-Stokes equations with a final overdetermination condition //Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2023. V.31, №4. P. 611–624.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЛОЖНО-ПОСТРОЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ В РЕЗУЛЬТАТЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

Имомназаров Х. Х.[1], Михайлов А. А.[1], Умаров И. Н.[2]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия, imom@omzg.sscc.ru;

[2]Шахрисабзский государственный педагогический институт, Шахрисабз, Узбекистан, ibroximxonumarov1@gmail.com

Регистрируемые сейсмические волны характеризуют не только очаг землетрясения, но и среду, через которую они распространяются, поэтому они являются основным носителем информации в сейсмологии. Самыми разрушительными при землетрясениях являются поверхностные волны, так как они имеют низкую частоту, большую амплитуду и внушительное время действия. Большую разрушительную силу имеют также прямые продольные сейсмические волны возникающие в результате сдвига тектонических плит земной коры на больших по площади пространственных участках. В результате такого типа очагов землетрясений генерируется протяжчнная плоская продольная волна с большой амплитудой. На амплитуду этих волн влияет не только геологическая структура в очаге землетрясения, но структура и физические свойств вышележащих слочв среды. Точные значения характеристик сейсмических волн регистрируемых на свободной поверхности могут быть определены в результате численного математического моделирования. Амплитуда и форма фронта этой волны заисит от геомтрии границ нижележащих слоев и акустической конрастности их физических свойств.

Математические методы, основанные на распространении сейсмических волн в акустической или идеально упругой среде, успешно применяются к различным геофизическим задачам для идентификации геологических структур.

В данной работе исследуются вопросы формирования сейсмических волновых полей от землетрясений, возникающих при тектонических процессах в нижних слоях земной коры. Для моделирования этого процесса численно решается прямая динамическая задача распространения сейсмических волн в упругой среде. Исходная система записывается в виде гиперболической системы в терминах скоростей смещений и тензора напряжений. Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования аналитического преобразования Лагерра по времени и конечно-разностного метода по пространству.

О ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

Карачик В. В.
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия,
karachik@susu.ru

Явный вид функции Грина $G_{2m}(x,\xi)$ задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре построен различными способами (см., например, [1]). Как альтернатива методу функции Грина в работе [2], приводится представление решения задачи Дирихле для однородного полигармонического уравнения в единичном шаре через решения задач Дирихле для уравнения Лапласа. В настоящей работе эта идея распространяется на задачу Неймана

$$\Delta^m u(x) = f(x),\, x\in S;\quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial S} = \psi_0(s),\ldots,\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\big|_{\partial S} = \psi_{m-1}(s), s\in\partial S, \qquad (1)$$

сформулированную для полигармонического уравнения А.В. Бицадзе [3], где S – единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим полином $\lambda^{[m]} = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+1)$, $m\in\mathbb{N}$ и обозначим через $h_m^{(j)}$ коэффициенты похожего полинома $h_m(\lambda) = \lambda(\lambda-2)\ldots(\lambda-2m+2)$ в его представлении в форме

$$h_m(\lambda) = h_m^{(1)}\lambda^{[1]} + h_m^{(2)}\lambda^{[2]} + \ldots + h_m^{(m)}\lambda^{[m]}$$

и пусть $H_m(\lambda) = \frac{1}{(2m)!!}h_m(\lambda)$. Доказывается что $h_m^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1}(2m-k-1)!}{(2m-2k)!!(k-1)!}$. Рассмотрим также операцию дифференцирования полиномов в виде $H_m^{(1)}(\lambda) = H_m(\lambda+1) - H_m(\lambda)$.

Теорема. *Для существования решения задачи Неймана (1) при $f\in C^1(\overline{S})$, $\psi_k\in C^{2m-1-k+\varepsilon}(\partial S)$, $k=0,\ldots,m-1$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$(-1)^{m-1}\int_{\partial S}\big(h_m^{(1)}\psi_0(\xi) + h_m^{(2)}\psi_1(\xi) + \ldots + h_m^{(m)}\psi_{m-1}(\xi)\big)\,ds_\xi = \int_S \frac{(|\xi|^2-1)^{m-1}}{(2m-2)!!}f(\xi)\,d\xi.$$

Решение задачи Неймана (1) может быть представлено в виде $u(x) = \int_0^1 v(tx)\,\frac{dt}{t} + C$, где функция $v(x)$ находится из равенства

$$v(x) = \sum_{k=0}^{m-1}(|x|^2-1)^k\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}H_k^{(j)}(1-\Lambda)q_j(x) + \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int_S G_{2m}(x,\xi)(\Lambda+2m)f(\xi)\,d\xi,$$

в котором гармонические в S функции $q_j(x)$ являются решениями следующих задач Дирихле $\Delta q_j(x) = 0$, $x\in S$; $q_j|_{\partial S} = \psi_j(s)$, $s\in\partial S$, $H_k^{(j)}(\lambda)$ – производная порядка j от полинома $H_k(\lambda)$, а $\Lambda = \sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial}{\partial x_k}$.

Литература

1. Karachik V.V. On Green function of the Dirichlet problem for polyharmonic equation in the ball // Axioms. 2023. T. 12, № 6. C. 543.

2. Karachik V.V. Solution to the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in the Ball // Siberian Advances in Mathematics. 2022. T. 32, № 3. C. 197–210.

3. Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 825–831.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Кожобеков К. Г.[1], Мамытов А. О.[1]

[1]Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан,
kudaiberdikozhobekov@oshsu; mamytov1968@list.ru

Исследуем разрешимость обратной задачи

$$\frac{\partial^{n+2}}{\partial t^n \partial x^2} w(t,x) + a_1(t,x) \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^n \partial x} w(t,x) + a_2(t,x) \frac{\partial^n}{\partial t^n} w(t,x) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(t) h_j(t,x) + F(t,x), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} w(0,x) = \psi_k(x), \ k = 0,1,2,\ldots,n, \ 0 \le x \le 1, \quad (2)$$

$$\alpha_{10} w(t,0) + \alpha_{11} w_x(t,0) + \beta_{10} w(t,1) + \beta_{11} w_x(t,1) = 0, \ 0 \le t \le T, \quad (3)$$

$$\alpha_{20} w(t,0) + \alpha_{21} w_x(t,0) + \beta_{20} w(t,1) + \beta_{21} w_x(t,1) = 0, \ 0 \le t \le T, \quad (4)$$

$$w(t,x_j) = g_j(t), \ t \in [0,T], \ \ 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < 1 \quad (5)$$

где $F(t,x),\ \psi_k(x),\ h_j(t,x),\ g_j(t)$ — заданные функций, $F \in C(\Omega),\ \psi_k \in C^2[0,1],\ g \in C^n[0,T],\ g_j^{(k)}(0) = \psi_k(x_j),\ k = 0,1,\ldots,n.$ $\alpha_{ij},\ \beta_{ij},\ T,\ x_0$ — известные постоянные числа. $w(t,x),\ \varphi_j(t) (j = 1,...,k)$ — неизвестные функций.

Требуется найти условия при выполнении которых обратная задача (1)-(5) имеет единственное решение в соответствующем пространстве.

Литература

1. Asanov A., Atamanov E.R. Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations.: Netherlands. VSP, Utrecht, 1997.

2. Асанов А., Атаманов Э.Р. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения // Сиб. матем. журнал. 1995. Т.36. №4.- С.752–762.

3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи.: Новосибирск. Сибирское научное издательство, 2009.

4. Мамытов А.О. Разрешимость обратной начально-краевой задачи с известным значением на прямой // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2021. Т. 13. №2. -С. 24–29.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Матвеева И. И.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
i.matveeva@g.nsu.ru

Рассматриваются неавтономные системы с запаздыванием следующего вида

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\dot{y}(t-\tau) + \int\limits_{t-\tau}^{t} D(t, t-s)y(s)\, ds,$$

$$+F\left(t, y(t), y(t-\tau), \dot{y}(t-\tau), \int\limits_{t-\tau}^{t} S(t,s)y(s)\, ds,\right), \qquad t \geq 0,$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t,s)$, $S(t,s)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания, $F(t, u_1, \dots, u_4)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция, определяющая нелинейные члены. Запаздывание может быть постоянным или переменным, причем оно может быть неограниченным. Мы используем достаточно широкий класс функционалов Ляпунова-Красовского, введенный в [1]

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds.$$

Эти функционалы позволяют нам получать оценки для решений указанных систем на всей полупрямой. Используя эти оценки, мы можем сделать вывод об устойчивости решений. Установлены условия экспоненциальной устойчивости, получены оценки для скоростей стабилизации решений на бесконечности и оценки для множеств притяжения. Настоящая работа продолжает наши исследования свойств решений неавтономных систем с запаздыванием (см., например, [2, 3]).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00367.

Литература

1. Матвеева И.И. Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 3. С. 96–103.

2. Матвеева И.И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 3. С. 579–594.

3. Матвеева И.И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с сосредоточенным и распределенным запаздываниями // Журн. вычисл. матем. мат. физ. 2024. Т. 64, № 8 (принято в печать).

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТИПА ЗАДАЧИ ЖЕВРЕ

Попов С. В.[1,2], Попова М. Н.[2]
[1]ГБУ «Академия наук Республики Саха (Якутия)», г. Якутск, Россия,
guspopov@mail.ru;
[2]ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», г. Якутск, Россия,
michiya9797@mail.ru

Краевые задачи типа задачи Жевре для параболических уравнений с меняющимся направлением времени, уравнений третьего порядка с кратными характеристиками рассматривались в работах М.С. Боуенди, П. Гривара, К.Д. Пагани, С.А. Терсенова, А.М. Нахушева, Т.Д. Джураева, И.Е. Егорова, Н.В. Кислова, С.Г. Пяткова, А.И. Кожанова, С.В. Потаповой, М.С. Туласынова, В.Г. Маркова, В.И. Антипина и других авторов.

Были рассмотрены задачи типа Жевре для параболических уравнений с полной матрицей условий сопряжения (склеивания), вопросы о базисности по Риссу собственных функций в случае общей матрицы условий склеивания, доказаны теоремы существования решений для дифференциальных уравнений в частных производных нечетного порядка по пространственной переменной. Отметим, что в случае непрерывных условий сопряжения разрешимость краевых задач следует из корректности интегральных уравнений с ядром, однородным степени -1 и редуцируется к интегральному оператору типа Винера-Хопфа вида $N = \frac{4}{\sqrt{3}} + i[\rho K \rho^{-1} - \rho^2 K \rho^{-2}], \rho = t^{2/3}$ (K — сингулярный оператор Коши), а в случае весовых условий сопряжения разрешимость следует из общей теории сингулярных интегральных уравнений.

Для параболических уравнений шестого порядка задача типа Жевре сводится сингулярному оператору $N = A - iR$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} r_{11} & \frac{1}{2} r_{12} & \frac{\sqrt{3}}{2} r_{13} \\ r_{21} & \frac{1}{2} r_{22} & \frac{\sqrt{3}}{2} r_{23} \\ \sqrt{3} r_{31} & \frac{\sqrt{3}}{2} r_{32} & \frac{3}{2} r_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$r_{11} = R_{0+} + 2K_3, r_{12} = R_{0+} - \sqrt{3}R_{1+} - 4K_3, r_{13} = R_{0-} - \sqrt{3}R_{1-}, r_{21} = R_{0+} - 4K_3,$$
$$r_{22} = R_{0+} + 3\sqrt{3}R_{1+} + 8K_3, r_{23} = R_{0-} + 3\sqrt{3}R_{1-}, r_{31} = R_{0-}, R_{32} = R_{0-} + 3\sqrt{3}R_{1-},$$
$$r_{33} = R_{0+} + \sqrt{3}R_{1+}, R_{0\pm} = K_7 \pm K_5, R_{1\pm} = K_2 \pm K_4, K_j = \rho^j K \rho^{-j}, \rho = t^{1/6}.$$

Получены критерии фредгольмовости полученных операторов в весовых пространствах Гельдера и Лебега, приведены формулы их индекса [1].

Литература

1. Popov S. V., Soldatov A. P. To the Theory of Singular Integral Equations of Non-Classical Type on a Segment of a Line // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44, № 8. pp. 3522–3534.

К ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

Псху А. В.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
pskhu@list.ru

В докладе обсуждаются свойства операторов

$$D_{0x}^{[\mu]}u(x) = \int_{\mathbb{R}} D_{0x}^{t}u(x)\,\mu\,(dt)\,, \tag{1}$$

и

$$\partial_{0x}^{[\mu]}u(x) = \int_{\mathbb{R}} \partial_{0x}^{t}u(x)\,\mu\,(dt)\,, \tag{2}$$

где D_{0x}^{t} и ∂_{0x}^{t} — производные (интегралы) дробного порядка t по переменной x с началом в точке $x = 0$ в смысле Римана–Лиувилля и в смысле Герасимова–Капуто, соответственно; μ — знакопеременная борелевская мера на $\mathbb{R}$.

Операторы (1) и (2) относятся к классу операторов дробного интегрирования и дифференцирования распределенного порядка [1].

Для операторов (1) и (2) изучены различные представления, в том числе в терминах свертки, для соответствующих ядер построены пары Сонина [2], доказаны принципы экстремума, найдены законы композиции, формулы обращения, а также формулы Ньютона–Лейбница.

Литература

1. Нахушев А.М. К теории дробного исчисления //Дифференц. уравнения. 1988. Т.24, №2. –С. 313–324.

2. Сонин Н.Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. –Москва: ГИТТЛ, 1954.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Т.Д. ДЖУРАЕВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Сопуев А.

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан
sopuev@mail.ru

В области D, ограниченной отрезками $AC: x+y=0, CB: x-y=\ell(\ell>0), BB_0: x=\ell, B_0A_0: y=h(h>0), AA_0: x=0$, рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}(u_{xx}-u_y+c_1(x,y)u)+d_1(x,y)u=0,(x,y)\in D_1,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}(u_{xx}-u_{yy}+a_2(x,y)u_x+b_2(x,y)u_y+c_2(x,y)u)=0,(x,y)\in D_2,\end{cases}\qquad(1)$$

где $c_1(x,y), d_1(x,y), a_2(x,y), b_2(x,y), c_2(x,y)$ - заданные функции, а $D_1=D\cap(y>0), D_2=D\cap(y<0)$.

Уравнение (1) в области D_1 имеет одну трех кратную характеристику $y=const$, а в области D_2 имеет три различных действительных характеристик: $y=const$, $x+y=const$, $x-y=const$.

Актуальность исследования краевых задач для таких уравнений указана академиком Т.Д. Джураевым. Обзор краевых задач для уравнений смешанного типа приведен в работах [1 - 6].

Задача Т.Д. Джураева. Требуется найти в области D функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap[C^{3+1}(D_1)\cup C^{3+2}(D_2)]$, которая в области $D\diagdown(y=0)$ удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y), u_{xx}(0,y)=\varphi_2(y), u(\ell,y)=\varphi_3(y), 0\le y\le\ell,$$
$$u\mid_{AC}=\psi_1(x), \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x), 0\le x\le\frac{\ell}{2},$$

где $\varphi_i(y)(i=1,2,3), \psi_j(x)(j=1,2)$ - заданные гладкие функции.

Методом интегральных уравнений доказано существование и единственность решения данной задачи.

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. - Ташкент: Фан, 1979. - 240 с.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. - Ташкент: Фан, 1986. -220 с.

3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, 1981. - 448 с.

4. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. - Ташкент: Фан, 1974. - 156 с.

5. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. - М.: Наука, 2006. - 287 с.

6. Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. - Шымкент: Гылым, 1993. - 328 с.

О ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Фалалеев М. В.

Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация,
mvfalaleev@gmail.com

Рассматривается задача Дирихле в полупространстве $t > 0$ для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\sum_{j=1}^{n} \left(b_{ij} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2} \right) + a_{ij} \left(\epsilon \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \right) = h_i(x_1, x_2, t), \tag{1}$$

$$u_i(x_1, x_2, 0, \epsilon) = f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $u_i(x_1, x_2, t, \epsilon) \in C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, $f_i(x_1, x_2)$, $h_i(x_1, x_2, t) \in C(\mathbb{R}^2)$, и $f_i(x_1, x_2)$, $h_i(x_1, x_2, t)$ финитны, $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ – малый параметр, $\lim\limits_{(x_1,x_2,t)\to\infty} |u_i(x_1, x_2, t| < +\infty$.

Исследуется зависимость между решениями исходной задачи (1) – (2) и предельной (когда $\epsilon = 0$). Разрешимость задачи (1) – (2) очевидно зависит как от свойств дифференциального оператора $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) - \left(\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial t}\right)$, так и от свойств матричного пучка $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$, здесь $\mathbb{B} = \|b_{ij}\|$, $\mathbb{A} = \|a_{ij}\|$. В докладе отслеживается влияние каждого из этих факторов.

Для матричного пучка $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$ возможны два существенно разных случая. Если матрица $\mathbb{B}$ обратима, то без ограничения общности можно считать ее единичной, в этом случае основные результаты сфомулированы в терминах жордановой структуры (см. [1]) матрица $\mathbb{A}$. Если матрица $\mathbb{B}$ необратима, $\mathbb{A}$ обратима и матричный пучок $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$ регулярен (см. [2, 3]), то основные результаты сформулированы в условиях повышенной гладкости на правые части $h_i(x_1, x_2, t)$, что является проявлением свойства необратимости матрицы $\mathbb{B}$. В случае нарушения этих условий гладкости задача (1) – (2) окажется неразрешимой в данных условиях, но можно ставить вопрос о ее разрешимости в пространстве обобщенных функций медленного роста (см. [4]).

Представленная методика может быть применена к исследованию систем дифференциальных уравнений в частных производных другого типа.

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Терия матриц. М.: Наука, 1988.

2. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.

3. Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.

4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

СЕКЦИОННЫЕ УСТНЫЕ И СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ SHORT COMMUNICATIONS AND POSTERS

ERROR ESTIMATION FOR THE THIRD-ORDER ACCURACY APPROXIMATE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM BY THE TAYLOR FORMULA

Abdullaev A. Kh.[1], Ruzimuradova D. Kh.[2]

[1,2] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,

[1]abduganiax@mail.ru; [2]drozimuradova@gmail.com

We study a problem of approximate solving at the Cauchy problem

$$y^{'} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

that is important in applications of Mathematics.

It is assumed that $f : D \to \mathbb{R}$, D is a convex open set, and the function $f(x,y)$ has the third order continuous partial derivates. If we denote the exact solution of problem (1) by $y_*(x)$, and the approximate solution by $\widetilde{y}(x)$ $(x_0 \le x \le x_*)$, the accuracy of the approximate solution is estimated by the following quantity:

$$\Delta = \sup_{x_0 \le x \le x_*} |y_*(x) - \widetilde{y}(x)|.$$

We can define the following numbers:

$$M_0 = \max_{(x,y)\in K} |f(x,y)|, \quad M_{10} = \max_{(x,y)\in K} |f_x(x,y)|, \quad M_{01} = \max_{(x,y)\in K} |f_y(x,y)|, \ldots$$

We denote $y^{(m)} = P_m(f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, ..., f_{x^n}, f_{x^{n-1}y}, ..., f_{y^n})$, where $f_{x^\alpha y^\beta}$ denotes $\frac{\partial^{\alpha+\beta} f[x,y(x)]}{\partial x^\alpha y^\beta}$, P_m is a polinomial of degree m. For example,

$$P_1 = f,\ P_2 = f_x + f_y f,\ P_3 = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + (f_y)^2 f + f_y f_x.$$

Further, we use the following notation as well:

$$l_m = P_m(M_0, M_{10}, M_{01}, M_{11}, M_{12}, M_{02}, ..., M_{n0}, M_{n-1,1}, ..., M_{0n}).$$

Theorem. For the approximate solution, the estimate

$$|y_*(x) - \widetilde{y}(x)| \le (L_0 + L_1 h + L_2 h^2) h^3 \frac{e^{M_{01}(x-x_0)} - 1}{M_{01}}$$

holds true, where

$L_0 = \frac{1}{6}((3M_{21} + M_{01}M_{11} + M_{10}M_{02})l_1 + M_{02}l_1l_2 + (3M_{12} + M_{01}M_{02}){l_1}^2 +$
$+ M_{03}{l_1}^3 + M_{30} + M_{10}M_{11}),$
$L_1 = \frac{1}{24}((M_{21} + M_{02}M_{10})l_2 + (2M_{12} + M_{02}M_{01})l_1l_2 + M_{11}l_3 + M_{02}l_1l_3 + {l_1}^2 l_2 M_{03}),$
$L_2 = \frac{1}{120}((M_{02}M_{10} + M_{21})l_3 + (2M_{12} + M_{02}M_{01})l_1l_3 + M_{03}{l_1}^2 l_3).$

ABOUT PROPOSITION BERGMAN KERNEL FOR MATRIX DOMAINS

Abdullayev J.Sh.[1], **Xaytboyev S. X.**[1]
Urgench state university, Urgench, Uzbekistan;
jonibek-abdullayev@mail.ru, sobirjon5152@gmail.com

The Bergman space on bounded symmetric domains is a fundamental concept in the analysis. It is equipped with a natural projection, i.e. the Bergman projection, determined by the property of the reproducing nucleus. On the other hand, the weighted Bergman spaces are also important in harmonic analysis (see, for example [1-2]).

The Bergman kernel for any transitive circular domain is equal to the ratio of the volume density to the Euclidean volume of the domain. Hua Luogeng in [2] constructed Bergman kernels for four types of classical domains, being guided only by this consideration and without resorting to complete orthonormal systems, and in this book one can also find explicit expressions for the Bergman kernel, groups of automorphisms of the domain $\Re_I(m,k), \Re_{II}(m), \Re_{III}(m)$ and $\Re_{IV}(n)$.

Definition ([3]). *Let $\{\varphi_\nu(z), \nu = 0,1,2,...\}$ be a complete orthonormal system of holomorphic functions in $L^2(D)$. The Bergman kernel (or kernel function) $K_D(z,\bar{\zeta})$ is the sum of the series*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\zeta)} = K_D(z,\bar{\zeta}),$$

which is holomorphic by z and antiholomorphic by ζ

For example (see [3], [4]), the Bergman kernel for a ball with radius R, $\mathbb{B}^n(R) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$, has the form

$$K_{\mathbb{B}^n(R)}(z,\bar{\zeta}) = \frac{n!R^2}{\pi^n\left(R^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} z_k\bar{\zeta}_k\right)^{n+1}}.$$

The paper presents is to find optimal estimates for the Bergman kernels for the classical domains $\Re_I(m,k)$, $\Re_{II}(m)$, $\Re_{III}(m)$ and $\Re_{IV}(n)$, respectively, through the Bergman kernels in balls from the spaces $\mathbb{C}^{mk}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m+1)}{2}}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m-1)}{2}}$ and $\mathbb{C}^n$.

References

1. Krantz S. G. Harmonic and complex analysis in several variables, Springer Monographs in Mathematics, Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland (2017), 429 p.

2. Hua Luogeng, Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains, AMS, 1963.

3. Shabat B.V., Introduction to Complex Analysis Part II Functions of Several Variables, Nauka, Fiz. Mat. Lit., M., 1985 (in Russian).

4. Fuks B. A., Special Chapters in the Theory of Analytic Functions of Several Complex Variables (in Russian), Fizmatgiz, Moscow (1963).

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE SOURCE IN A PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION

Ablabekov B. C.[1], **Kurmanbaeva A. K.**[2]

[1]Kyrgyz National University named after Zhusup Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan, ablabekov_63@mail.ru;

[2]Kyrgyz State Technical University named after. I.Razzakova Bishkek, Kyrgyzstan, ainura1971@mail.ru

Let us denote by $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}, l, T > 0$ fixed numbers. In the domain Ω_T, consider the inverse problem of determining a pair of functions $\{u(x,t), f(t)\}$, satisfying the pseudohyperbolic equation

$$u_{tt} - u_{xxt} - a(x,t)u_{xx} = f(t)h(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

initial conditions

$$u(x,0) = \phi_0(x), \quad u_t(x,0) = \phi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

boundary conditions

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

and the additional condition of integral redefinition

$$u_x(0,t) = \psi(t), 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

where is $h(x,t)$, $g(x,t)$, $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\psi(t)$ – specified functions.

Theorem. Let

$$a(x,t) \in C^2(\overline{\Omega}_T),\ a(0,t) = a(l,t) = 0,\ \phi_0(x) \in C^2[0,1],\ \phi_1(x) \in C^1[0,1],$$

$$\mu_1(t) \in C^2[0,T],\ \mu_2(t) \in C^2[0,T],\ h(x,t),\ g(x,t) \in C^{(1,0)}(\overline{\Omega}_T),\ \psi(t) \in C^2[0,T],$$

and the conditions of agreement up to the second order are fulfilled.

In addition, $|h(0,t)| \geq \alpha > 0$ for all $t \in [0,T]$. Then there is a unique solution to the inverse problem (1)–(4).

Note that inverse problems for pseudo-hyperbolic equations were studied in [1].

References

1. Ablabekov, B.S. Inverse problems for third order differential equations/ B.S. Ablabekov, A.R. Asanov, A.K. Kurmanbayeva. Bishkek.: Ilim, 2011.

ON THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF A LOADED FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

Akhmetshin A. D.[1], Akhmanova D. M.[2], Космакова M. T.[3]
[1,2,3]Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan,
[3]Institute of Applied Mathematics, Karaganda, Kazakhstan
[1]*aleksandr*_050401@*mail.ru*; [2]danna.67@mail.ru; [3]svetlanamir578@gmail.com

In the domain $\Omega = \{(x;y) : 0 < x;\ 0 < y < T\}$ we consider a boundary value problem for a loaded differential equation with a Riemann-Liouville derivative of an order $\beta \in (0;1/2)$ [1] and a loaded term that contains a fractional derivative of an order $\beta \in (0;3/2)$:

$$D_{0t}^{2\beta}u(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \lambda\left[D_{0x}^{\gamma}u(x,t)\right]\big|_{x=t} = f(x,t), \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{2\beta-1}u(x,t) = u(0,t) = 0. \tag{2}$$

If $\gamma < 1+\beta$, $x^{2-\gamma}f(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, then the solution to problem (1) - (2) can be represented in the form:

$$u(x,t) = \int_0^{\infty}\int_0^t f(\eta,\zeta)W_\beta(|\eta - x|, \eta + x, t-\zeta)\,d\zeta\,d\eta - \lambda\int_0^t \mu(\zeta)\omega_{2,\beta}(x, t-\zeta)\,d\zeta,$$

where $\mu(t)$ satisfies the equation

$$\mu(t) = -\lambda\int_0^t \mu(\zeta)\omega_{2-\gamma,\beta}(t, t-\zeta)\,d\zeta + F_\gamma(t),$$

and

$$\mu(t) = \left[D_{0x}^{\gamma}u(x,t)\right]\big|_{x=t},\ F_\gamma(t) = \left[D_{0x}^{\gamma}\int_0^{\infty}\int_0^t f(\eta,\zeta)W_\beta(|\eta - x|, \eta + x, t-\zeta)\,d\zeta\,d\eta\right]\Big|_{x=t},$$

$$\omega_{\delta,\nu}(x,y) = x^{\delta-1}y^{\nu-1}e_{1,\beta}^{\delta,\nu}\left(-\frac{x}{y^\beta}\right),\ W_\beta(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2}(\omega_{1,\beta}(x_1,t) - \omega_{1,\beta}(x_2,t)).$$

Here

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta - \beta n)}\ (\alpha > \beta > 0, z \in \mathbb{C})$$

is a Wright-type function [2].

This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488740, 2024–2026.)

References

1. Nakhushev A. M. Fractional calculus and its application. Moscow: Fizmatlit, 2003.
2. Pskhu A. V. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka [Equations in partial derivatives of fractional order]. Moscow: Nauka; 2005.

THE MAXIMAL AND MINIMAL VALUES OF THE RATIO OF DIFFERENCES OF POWER MEAN, ARITHMETIC MEAN, AND GEOMETRIC MEAN

Aliyev Y. N.[1]
ADA University, Baku, Azerbaijan;
yaliyev@ada.edu.az

In the paper the maximum and the minimum of the ratio of the difference of the arithmetic mean A_n and the geometric mean G_n, and the difference of the power mean P_α and the geometric mean G_n of n variables, is studied. A new optimization argument was used which reduces n variable optimization problem to a single variable. All possible cases of the choice of the power mean and the choice of the number of variables of the means is studied. The obtained results generalize and complete the earlier results which were either for specific intervals of power means or for small number of variables of the means. Some of the results are formulated as the best constant inequalities involving interpolation of the arithmetic mean and the geometric mean. The following results are obtained:

1. *If* $\alpha < 0$, *then* $-\infty < \dfrac{A_n - G_n}{P_\alpha - G_n} \le \omega_1 = \dfrac{\nu_1}{\nu_1 - 1}$, *where* ν_1 *is the minimum of* $f(x)$ *in interval* $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n-1}\right)$.

2. *If* $\alpha > 1$, *then* $\omega_2 = \dfrac{\nu_2}{\nu_2 - 1} \le \dfrac{A_n - G_n}{P_\alpha - G_n} \le \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$, *where* ν_2 *is the maximum of* $f(x)$ *in interval* $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.

3. *If* $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ *and* $n < \dfrac{1}{1-\alpha}$, *then* $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \le \dfrac{A_n - G_n}{P_\alpha - G_n} \le \omega_3 = \dfrac{\nu_3}{\nu_3 - 1}$, *where* ν_3 *is the minimum of* $f(x)$ *in interval* $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.

4. *If* $\dfrac{1}{2} \le \alpha < 1$ *and* $n \ge \dfrac{1}{1-\alpha}$, *or if* $0 < \alpha \le \dfrac{1}{2}$ *and* $n \ge \dfrac{1}{\alpha}$, *then* $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \le \dfrac{A_n - G_n}{P_\alpha - G_n} \le n^{\frac{1}{\alpha}-1}$.

5. *If* $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ *and* $n < \dfrac{1}{\alpha}$, *then* $\omega_4 = \dfrac{\nu_4}{\nu_4 - 1} \le \dfrac{A_n - G_n}{P_\alpha - G_n} \le n^{\frac{1}{\alpha}-1}$, *where* ν_4 *is the maximum of* $f(x)$ *in interval* $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n-1}\right)$.

The obtained results can also be interpreted as the best constant inequalities generalizing AM-GM inequality.

ANALYSIS OF A DOUBLE NONLINEAR PARABOLIC CROSSWISE-DIFFUSION SYSTEM NOT IN DIVERGENT FORM

Aripov M.[1], Bobokandov M.[2]
[1,2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
mirsaidaripov@mail.ru;
[2]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan,
bmahmudbey@gmail.com

In the domain $Q = \{(t,x) : t > 0, x \in R\}$, we consider the Cauchy problem for a double nonlinear parabolic system of equations not in divergent form with a source

$$\begin{cases} u_t = v^{q_1}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u^{k_1}}{\partial x}\right|^{p-2}\nabla u\right) + d_1 u^{\alpha_1} v^{\alpha_3} \\ v_t = u^{q_2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(v^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial v^{k_2}}{\partial x}\right|^{p-2}\nabla v\right) + d_2 u^{\alpha_2} v^{\alpha_4} \end{cases}, \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(t,x)|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \\ v(t,x)|_{t=0} = v_0(x) \geq 0, \end{cases} \qquad x \in R, \tag{2}$$

where $k_i, m_i \geq 1, p \geq 2, q_i < 1,\ d_i, \alpha_i, \alpha_{i+2},\ (i = 1, 2,)$ are given numerical parameters.

The system of equations (1) is called the system of equations of polytrophic filtration, a two-componential nonlinear medium [2].

Our main goal is to study the solutions of system (1) in the steady case. Therefore, we will look for solutions in the next form

$$\begin{cases} u_s(x) = L_1\,(a - \varepsilon x)_+^{l_1}, \\ v_s(x) = L_2\,(a - \varepsilon x)_+^{l_2}, \end{cases} \tag{3}$$

where $l_i = \dfrac{p}{l}\left(m_{3-i} + k_{3-i}(p-2) - q_i - \alpha_{7-3i} + \alpha_{4-i}\right), l = \prod_{i=1}^{2}(m_i + k_i(p-2) - \alpha_{3i-2}) - \prod_{i=1}^{2}(\alpha_{4-i} - q_i)$, $\varepsilon = \pm 1, \operatorname{sgn}(\varepsilon) = \operatorname{sgn}(a), a = const$, and $L_i (i = 1, 2)$ is a constant and satisfies some conditions.

Using the self-similar analysis and other methods described in [1], we can easily show that functions (3) are solutions of system (1) and spatial blow-up occurs at finite x.

References

1. Арипов М.М., Садуллаева Ш.А. Компьютерное моделирование нелинейных процессов диффузии. Ташкент.: Университет(НУУз), 2020.

2. Bobokandov M., Aripov M., and Uralov N. Analysis of Double Nonlinear Parabolic Crosswise-Diffusion Systems with Time-Dependent Nonlinearity Absorption // In ICTEA: International Conference on Thermal Engineering. 2024. vol. 1, no. 1.

NUMERICAL SIMULATION OF SOLUTION OF THE DEGENERATE PARABOLIC PROBLEM WITH NONLINEAR SOURCE AND ABSORPTION TERMS WITH VARIABLE DENSITY

Aripov M. M.[1], Atabaev O. Kh.[2]
[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
mirsaidaripov@mail.ru;
[2]Andijan State University, Andijan, Uzbekistan,
odiljonatabaev@gmail.com

In this work, we consider the following doubly nonlinear degenerate parabolic equation with nonlinear source and absorption with variable density

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\left(|x|^n u^{m-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u\right) + u^{q_1} - u^{q_2}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

here $n > 0$, $m, k > 1$, $p > 2$, $q_1 > 0$, $q_2 \geq 1$, $q_1 \neq q_2$ and $\Omega \subset R^N$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ and with bounded and appropriately smooth function $u_0(x) \neq, > 0$.

Recently, there has been intensive study on problems similar to (1)-(2). Importance of problems with variable density function lies that leading to more realistic modeling of real-world processes(see [1]-[2] and literature therein). They arise in different fields of mathematical modeling of natural processes, as heat conduction in inhomogeneous media, fluid flow in porous media. In particular, problems with variable density occur when modeling biological population processes[1].

Since $q_1 > \max\{m + k(p-2), q_2\}$ holds, we can choose specific value of constant α where it satisfies

$$\frac{1}{q_1 - 1} < \alpha < \min\left\{\frac{1}{m + k(p-2) - 1}, \frac{1}{q_2 - 1}\right\}$$

and define a function

$$\underline{u}(t,x) = (T-t)^{-\alpha} f(\xi), \quad \xi = \frac{|x|}{(T-t)^{-\beta}}, \quad \beta = \frac{1 - \alpha(m + k(p-2) - 1)}{p} \tag{6}$$

where $f(\xi) = \left(a^{\frac{p}{p-1}} - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{m+k(p-2)-1}}$. It should be noted that $supp(\underline{u}(x,t)) \subset B\left(0, aT^{\beta}\right) \subseteq \Omega$ for sufficiently small T.

Completed numerical experiments done with both Newthon's Method and Picard iteration methods. It can bee concluded that Newthon's method gave more precise results, as it takes the initial approximation close to the actual solution and converges rapidly.

References

1. Aripov M., Sadullaeva Sh., Computer modelling of nonlinear diffusion processes. Monograph. Tashkent.: University, 2020.

2. Aripov M., Bobokandov M., and Mamatkulova M. To numerical solution of the non-divergent diffusion equation in non-homogeneous medium with source or absorption, AIP Conf. Proc. 3085, 020024 (2024) https://doi.org/10.1063/5.0194632

THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE THREE-DIMENSIONAL HELMHOLTZ EQUATION WITH THREE SINGULAR COEFFICIENTS IN INFINITE FIRST OCTANT

Arzikulov Z. O.[1], **Ergashev T. G.**[2]
[1]Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Uzbekistan
[2]National Research University "TIIAME" , Tashkent, Uzbekistan;
zafarbekarzikulov1984@gmail.com[1]; ergashev.tukhtasin@gmail.com[2]

Let us consider the following singular Helmholtz equation

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y+\frac{2\gamma}{z}u_z-\lambda^2u=0,\quad 0<2\alpha,\,2\beta,\,2\gamma<1 \tag{1}$$

in the infinite domain $\Omega\equiv\{(x,y,z):x>0,\ y>0,\ z>0\}$

The Dirichlet problem. Find a regular solution $u(x,y,z)$ to the singular Helmholtz equation (1) in the class of functions $C\left(\overline{\Omega}\right)\cup C^2(\Omega)$, satisfying the conditions

$$u(x,y,0)=\tau_1(x,y),\quad 0\le x,y<\infty,\quad u(x,0,z)=\tau_2(x,z),\quad 0\le x,z<\infty, \tag{2}$$

$$u(0,y,z)=\tau_3(y,z),\quad 0\le y,z<\infty,\ \lim_{R\to\infty}u(x,y,z)=0,\ \ R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{3}$$

where $\tau_1(t,s),\ \tau_2(t,s)$ and $\tau_3(t,s)$ are given functions.

An unique solution of the Dirichlet problem for the Helmholtz equation (1) is expressed by the confluent hypergeometric function in three variables [1]:

$$\Xi_{22}^{(3)}\left(a,b,a',b';c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m\left(a'\right)_n\left(b'\right)_n}{(c)_{m+n+p}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!},\ \ \max\left\{|x|,|y|\right\}<1.$$

Theorem. Function $u\left(x,y,z\right)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{4}\left(-1\right)^{j+1}u_{ij}\left(x,y,z\right)$, is a regular solution of equation (1) in the domain Ω, satisfying the boundary conditions (2) and (3), where

$$u_{1j}\left(x,y,z\right)=\frac{2(1-2\gamma)x^{-\alpha}y^{-\beta}z^{1-2\gamma}}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{\tau_1\left(t,s\right)t^\alpha s^\beta}{\rho_{1j}^{3-2\gamma}}\times$$

$$\times\Xi_{22}^{(3)}\left(\alpha,1-\alpha,\beta,1-\beta;\gamma-\frac{1}{2};\frac{\rho_{1j}^2}{-4xt};\frac{\rho_{1j}^2}{-4ys};\frac{\lambda^2}{4}\rho_{1j}^2\right)dtds,$$

$$\rho_{11}=\sqrt{\left(t-x\right)^2+\left(s-y\right)^2+z^2},\ \rho_{12}=\sqrt{\left(t+x\right)^2+\left(s-y\right)^2+z^2},$$

$$\rho_{13}=\sqrt{\left(t+x\right)^2+\left(s+y\right)^2+z^2},\ \ \rho_{14}=\sqrt{\left(t-x\right)^2+\left(s+y\right)^2+z^2},$$

and a remained functions u_{2j} and u_{3j} are defined similarly with corresponding ρ_{2j} and ρ_{3j} $(j=1,2,3,4)$.

References

1. Arzikulov Z.O., Ergashev T.G. Some systems of PDE associated with the multiple confluent hypergeometric functions and their applications, *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 45(2) (2024): 591 - 603.

PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH DISCRETE EFFECT MEMORY AND INTEGRAL CONDITION

Assanova A. T.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
anartasan@gmail.com

We consider the problem for system of hyperbolic equations with discrete effect memory and integral condition

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + C(t,x)u(t,x) + f(t,x) +$$

$$+A_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial x} + B_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial t} + C_0(t,x)u(\gamma(t),x), \qquad (t,x) \in \Omega, \qquad (1)$$

$$P(x)u(0,x) + \int_0^T K(\tau,x)u(\tau,x)d\tau = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (2)$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (3)$$

where $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$, $u(t,x) = (u_1(t,x),...,u_n(t,x))'$ is unknown vector function, the $n \times n$ matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $A_0(t,x)$, $B_0(t,x)$, $C_0(t,x)$ and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω;

$\gamma(t) = \zeta_j$ if $t \in [\theta_j, \theta_{j+1})$, $\theta_j \le \zeta_j < \theta_{j+1}$ for all $j = 0,1,...,N-1$;
$0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{N-1} < \theta_N = T$;

the $n \times n$ matrix $P(x)$ and the n vector function $\varphi(x)$ are continuously differentiable on $[0,\omega]$, the $n \times n$ matrix $K(t,x)$ is continuously differentiable in x on Ω; the n vector function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0,T]$.

We study a questions for existence and uniqueness of solution to the problem (1)–(3). For this we use the approach in [1] to solve of the problem (1)–(3). At first, in problem (1)-(3) we introduce new functions and transfer to family of problems for differential equations with discrete effect memory and integral condition.

Further, introducing functional parameters as the values of the desired solution along the lines of the domain partition with respect to the time variable, we obtain an equivalent problem for the system of differential equations with initial conditions and functional relations with respect to the introduced parameters. We have developed a two-stage procedure to approximately solve the latter problem. We have obtained some conditions for the convergence of approximate solutions to the exact solution of the problem under study in terms of input data and proved that these conditions guarantee the existence of a unique solution of the equivalent problem. Finally, we have established coefficient conditions for the unique solvability of the problem (1)-(3).

References

1. Assanova A.T. Hyperbolic equation with piecewise-constant argument of generalized type and solving boundary value problems for it // Lobachevskii J. Math. 2021. V.42, №15, P. 3584–3593.

AN INVERSE PROBLEM FOR THE INTEGRO-DIFFERENTIAL PARABOLIC EQUATION IN THE CASE OF NONLOCAL INITIAL-BOUNDARY AND OVERDETERMINATION CONDITIONS

Atoyev D. D.
Bukhara State University Phd student
DilshodAtoyev@mail.ru

Let $T > 0, l > 0$ be fixed numbers and $D_{Tl} = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$. Consider the inverse problem of determining of functions $u(x,t), k(t)$ such that they satisfy the equation

$$u_t - u_{xx} = \int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)d\tau, \quad (x,t) \in D_{Tl}, \tag{1}$$

the nonlocal initial condition

$$u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

the boundary conditions

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = \psi_1(t), \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = \psi_1(0) + \delta\psi_1(T), \quad \varphi'(l) + h\varphi(l) = \psi_2(0) + \delta\psi_2(T), \tag{4}$$

and the additional condition

$$\int_0^l \omega(x)u(x,t)dx = p(t), \quad p(0) + \delta p(T) = \int_0^l \omega(x)\varphi(x)dx, \tag{5}$$

here $\delta \geq 0, h > 0$ is a given number, $\varphi(x)$, $\omega(x)$, $p(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ are given functions of $x \in [0,l]$ and $t \in [0,T]$.

In this work the existence and uniqueness of the solution of inverse problem (1)–(5) is proved.

The main result of unique solvability is presented as follows.

Theorem. *Let conditions* $(\varphi(x), \omega(x)) \in C^2[0,l]$, $h(t) \in C^2[0,T], \psi_1(t), \psi_2(t) \in C^2[0,T]$, $\varphi'(0) - h\varphi(0) = \psi_1(0) + \delta\psi_1(T), \varphi'(l) + h\varphi(l) = \psi_2(0) + \delta\psi_2(T)$, $\delta \geq 0$, $p(0) > 0$, $p(t) \in C^2[0,T]$, $\omega'(0) = h\omega(0)$, $\omega'(l) = -h\omega(l)$ *be satisfied.*

Then for any $T > 0$ *on the interval* $[0,T]$ *there exists a single solution to the inverse problem (1)–(5) of the class* $u(x,t) \in C^{2,1}\left(\overline{D}_{Tl}\right)$, $k(t) \in C[0,T]$, *where* $D_{Tl} = \{(x,t) | x \in (0,l), t \in (0,T]\}$.

The (1)–(3) problem was replaced by an equivalent of an integral equation. The local existence and uniqueness of direct problem solution was proven. The inverse problem was considered for determining the kernel $k(t)$ included in the equation (1) with integral observation (4) of the solution of this system with the initial and boundary conditions (2), (3). Conditions for given functions are obtained, under which the inverse problem has existence and a unique solution.

ON THE CONJUGATION PROBLEM FOR A CLASS OF COMPOSITE AND HYPERBOLIC TYPE FOURTH-ORDER EQUATIONS

Babaev S.[1], **Bekmamatov Z. M.**[2]
[1]Branch of the Technological University of Tajikistan in Isfara, Isfara, Tajikistan
bsayfullo@internet.ru
[2]Batken State University, Batken, Kyrgyzstan,
zbekmamatov@mail.ru

In the domain D bounded by the lines $\gamma = AB, BC : x = 0$, and segments of the straight lines $CA_1 : y = -h$, $AA_1 : x = 1(h > 0)$ and $D_1 = D \cap (y > 0)$ a quarter circle $\mid z \mid\leq 1, D_2 = D \cap (y < 0)$, where AB is the arc of the circle $\mid z \mid= 1$, $z = x + iy$, s is the arc length of the circle $\mid z \mid= 1$, OM is a segment of the straight line $y - x = 0; O(0; 0)$; $A(0; 1)$, $B(1; 0)$.

Problem 1. Find the function

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^3(D) \cap [C^{3+1}(D_1) \cup C^{1+3}(D_1) \cup \ \cup C^{1+3}(D_2)]$$

satisfying in the domain D_1 the equation

$$u_{xxxy} + u_{xyyy} = 0, \tag{1}$$

and the boundary conditions

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u \mid_\gamma= \varphi(s), \quad u_{xx}(0, y) = \varphi_2(y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta u|_{OM} = \varphi_3(x), \qquad 0 \leq y \leq 1,$$

and also satisfying in the domain D_2 the equation

$$u_{xyyy} + du = 0, \tag{2}$$

and the boundary conditions

$$u(0, y) = \psi(y), \quad -h \leq y \leq 0, \quad u(x, -h) = \psi_1(x), \quad u_y(x, -h) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

where $\varphi_k(y), \varphi(s), \psi(y), \psi_k(x)(k = 1, 2)$ are given functions that meet certain smoothness and compatibility conditions.

It is easy to verify that equation (1) belongs to the composite type, while equation (2) belongs to hyperbolic type [1].

In this work, using methods of the theory of mixed-composite type equations [2,3], the existence and uniqueness of the solution to problem 1 are proven. Explicit solution formulas for Problem 1 in the subregions of the domain D are obtained.

References

1. Juraev T.D., Sopuev A. On the theory of fourth-order partial differential equations. - Tashkent: Fan, 2000. - 144 p.

2. Juraev T.D. Boundary problems for mixed and mixed-composite type equations. - Tashkent: Fan, 1979. - 240 p.

3. Bekmamatov Z.M. Conjugation problems for composite and hyperbolic type fourth-order equations / Dissertation for candidate of physics and mathematics sciences, Osh, 2022. - 105 p.

ON THE NEGATIVE ORDER LOADED MODIFIED KORTEVEG-DE VRIES EQUATION WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE

Baltaeva.I. I.[1], **Atanazarova Sh. E.**[2], **Matmurotova Sh.** [1]
[1]Urgench State University, Urgench, Uzbekistan,
iroda-b@mail.ru;
[2]Institute of Mathematics, Urgench, Uzbekistan,
atanazarova94@gmail.com

The negative order Korteveg-de Vries (nKdV) equation firstly derived by J.M. Verosky. Nowadays, there are major results on the integration of the nKdV and modified nKdV equations in various classes.

In the present study we are focus on the integration of the following system

$$\begin{cases} \rho_{xx} = -u^2 \\ u_{xt} + \alpha u + 2\rho_{xt} u - \gamma(t) u_x(0,t) u = \sum_{k=1}^{2N} \left(\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2\right), \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

where $\alpha \in R$ and $\gamma(t)$ is arbitrary continuous function. The system (1) is considered under the initial condition

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

where $u_0(x)$ satisfies the following conditions

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)\,|u_0(x)|\,dx < \infty$,
2. The operator L_0, which expressed by the form

$$L_0 = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0 \\ u_0 & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix},$$

does not have spectral singularities and possesses exactly $2N$ simple eigenvalues $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots \xi_{2N}(0)$ such, that $Im\xi_k(0) > 0$, $\xi_{N+k}(0) = -\xi_k(0)$, $k = 1, \dots, N$.

$\Phi_k = (\Phi_{k1}(x,t), \Phi_{k2}(x,t))^T$ is an eigenvector-function of the operator L corresponding to the eigenvalue ξ_k. Furthermore, the function $u = u(x,t)$ is a complex valued and sufficiently smooth function of x and t, for all $t \geq 0$ satisfying the requirement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)\,|u(x,t)|\,dx < \infty,$$

$$\begin{cases} \rho(0,t) = 0, \ \ \rho_x(x,t) \to 1, \qquad\qquad x \to \infty \\ \rho_{xx}(x,t) \to 0, \ \ \rho_{xt}(x,t) \to 0, \ u_{xt}(x,t) \to 0, \quad x \to \pm\infty. \end{cases} \tag{3}$$

It is also assumed that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{k1}\Phi_{k2} dx = A_k(t), k = 1, 2, \dots 2N \tag{4}$$

where $A_k(t)$ is given continuous nonzero functions satisfying the conditions $A_k(t) = A_n(t)$ for $\xi_k = -\xi_n$.

The main aim of this work is developing IST method for the operator L for finding the solutions $u(x,t)$, $\rho(x,t)$,$\Phi_k(x,t)$ of the problem (1)–(4).

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED PSEUDO-PARABOLIC EQUATION OF FRACTIONAL ORDER

Bekenayeva K. S.[1], **Aitzhanov S. E.**[2]
[1]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan,
kymbat.bekenayeva@mail.ru;
[2]al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
aitzhanovserik81@gmail.com

The paper considers the solvability of a loaded equation with respect to a spatial variable for a linear pseudo-parabolic equation with an initial and second boundary condition. Many works have been devoted to study the issues of unambiguous solvability of problems for loaded equations, among which we note [1], where the bibliography contains enough literature in this direction. The issues of solvability of fractional order initial and boundary value problems for a pseudo-parabolic equation were studied in [2].

In rectangular domain $Q_T = \{x \in (0,1);\ t \in [0,T]\}$ consider a loaded pseudo-parabolic equation

$$D^{\alpha}_{0,t}u - D^{\alpha}_{0,t}u_{xx} - u_{xx} + cu = f(x,t) + b_1(x,t)D^{\alpha}_{0,t}u_{xx}(0,t) + b_2(x,t)u_{xx}(0,t), \tag{1}$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < t < T,$$

with initial

$$u(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le 1 \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u_x(0,t) = 0, \ u_x(1,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

where $D^{\alpha}_{0,t}$ is Caputo fractional derivative of order $0 < \alpha \le 1$, $f(x,t)$, $b_i(x,t)\,(i = 0,\,1,\,2)$ and $u_0(x)$ are given functions, c is constant.

Theorem. Let the following inclusions be performed: $f(x,t),\ f_{xx}(x,t) \in L_2(Q_T)$, $f_x(0,t),\ f_x(1,t) \in C[0,T]$, $b_1(x,t),\ b_2(x,t) \in C^2(Q_T)$ and the following conditions are fulfilled

$$1 - \frac{3}{\varepsilon_1}\left(b^2_{10}(t) + b^2_{11}(t)\right) - \frac{\bar{b}^2_{11} + \bar{b}^2_{22}}{2c\varepsilon_1} - 4c\varepsilon_1 - 3\bar{b}^2_{11} \ge K_0 > 0, \quad t \in [0,T],$$

where $\bar{b}_{11} = \max\limits_{(x,t)\in D} b_{1xx}(x,t),\ \bar{b}_{22} = \max\limits_{(x,t)\in D} b_{2xx}(x,t),\ b_{10}(t) = b_{1x}(0,t),\ b_{11}(t) = b_{1x}(1,t)$, $0 < \varepsilon_1 < \frac{1-3\bar{b}^2_{11}}{4c}$. Then there is a solution $u(x,t)$ of non-local problem (1)-(3) such that $u,\ D^{\alpha}_{0,t}u,\ D^{\alpha}_{0,t}u_{xx},\ u_{xx} \in L_\infty(0,T;\,L_2(\Omega))$.

References

1. Dzhenaliev M.T. On the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations. Almaty, 1995. PhD thesis. 270 p.

2. Aitzhanov SE, Berdyshev AS, Bekenayeva KS. Solvability issues of a pseudo-parabolic fractional order equation with a nonlinear boundary condition // Fractal Fract. 2021, Vol. 5, No. 134. P. 1–17.

NUMERICAL METHOD FOR A FRACTIONAL-ORDER GENERALIZATION OF THE STOCHASTIC STOKES-DARCY MODEL

Berdyshev A. S.[1,2], **Baigereyev D. R.**[1,3]

[1]Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan
e-mail: berdyshev@mail.ru;
[2]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan,
[3]Sarsen Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan
e-mail: dbaigereyev@gmail.com

This report introduces an effective numerical approach for the generalized fractional-order stochastic Stokes–Darcy model initially proposed in [1, 2], which is applicable to various engineering, biomedical, and environmental problems due to its ability to describe interactions between free fluid flow and flows in a porous medium. Unlike the traditional model, this model accounts for the hereditary properties of the process under uncertainty conditions.

The hydraulic conductivity tensor, assumed to be uncertain, is modeled using the reduced Karhunen–Loève expansion. Uncertainty quantification is studied using sparse grid stochastic collocation method. The solution of the deterministic problems relies on finite element/finite difference discretization, where the approximation of the Caputo fractional derivatives is achieved using a fast algorithm of order $O\left(\tau^{3-\gamma}\right)$ from [3], where $\gamma \in (0,1)$ is the order of the fractional derivative. By employing the ensemble strategy [4], the deterministic problem is solved once for all samples of the hydraulic conductivity tensor, rather than individually for each sample. The algorithm for computing fractional derivatives significantly reduces both computational cost and memory usage.

The study includes a priori estimates which yield the stability and convergence of the deterministic numerical method and the results of numerous tests aimed at confirmation of the theoretical findings. Furthermore, we analyze the influence of fractional derivatives on the fluid flow process within the StokesвЃ"Darcy model under uncertainty conditions. To this end, we compare the results of solving a few stochastic test problems with different orders of fractional derivatives as well as an integer-order derivative.

This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871299).

References

1. Baishemirov Z., Berdyshev A., Baigereyev D., Boranbek K. Efficient numerical implementation of the time-fractional stochastic Stokes–Darcy model // Fractal and Fractional. 2024. Vol. 8, №. 476.

2. Berdyshev A., Baigereyev D., Boranbek K. Numerical method for fractional-order generalization of the stochastic StokesвЃ"Darcy model // Mathematics. 2023. Vol. 11 (17), №. 3763.

3. Zhu H., Xu C. A fast high order method for the time-fractional diffusion equation // SIAM Journal of Numerical Analysis. 2019. Vol. 57. pp. 2829–2849.

4. Jiang N., Layton W. An algorithm for fast calculation of flow ensembles // International Journal of Uncertainty Quantification. 2014. Vol. 4. pp. 273–301.

NON-LOCAL PROBLEMS FOR MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER

Berdyshev A. S.[1], Marat A. E.[2]

Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan,
[1]berdyshev@mail.ru, [2]marataigerim21@gmail.com

The work is devoted to the formulation and investigation of the solvability of new local and non-local boundary value problems for a mixed parabolic-hyperbolic equation of the third order, the determination of the conditions for the existence and uniqueness of regular and strong solutions of formulated problems in areas with both characteristic and non-characteristic boundaries, as well as the study of the spectral characteristics (Volterra property) of the corresponding differential operators, searching conditions on the problem's data, providing unambiguous solvability and proof of theorems on Volterra property for problems with local conditions and conditions of the Bitsadze-Samarsky type for the considered equation. The solvability of local and non-local problems is investigated (in the sense of solvability) by reducing to integral or integro-functional equations.

It should be noted that the study of the issues of unambiguous solvability of local and non-local boundary value problems and their spectral properties, including Volterra property and the eigenvalues existence of local and nonlocal problems for a mixed parabolo-hyperbolic (diffusion-wave) equation of the second and third orders with two independent variables were studied in [1-3], and for the diffusion-wave equation fractional order in [4], [5].

References

1. Berdyshev A.S. Boundary value problems and their spectral properties for the equation of mixed parabolicв–hyperbolic and mixed-composite types. Almaty.: Abai Kazakh National Pedagogical University, 2015. 224 pp. (Russian)

2. Berdyshev, A.S., Cabada, A., Karimov, E.T., Akhtaeva, N.S. On the Volterra property of a boundary problem with integral gluing condition for mixed parabolic-hyperbolic equation // Boundary Value Problems. 2013. Vol. 2013(94). P.1–14. DOI: 10.1186/1687-2770-2013-94.

3. Berdyshev, A., Cabada, A., Karimov, E. On the existence of eigenvalues of a boundary value problem with transmitting condition of the integral form for a parabolic-hyperbolic equation // Mathematics.2020. Vol. 8(6), 1030. P.1–13. DOI: 10.3390/math8061030.

4. Adil N., Berdyshev A.S., Eshmatov B.E., Baishemirov Zh.D. Solvability and Volterra property of nonlocal problems for mixed fractional-order diffusion-wave equation // Boundary Value Problems. 2023. №.47(2023). P.1–29. DOI: 10.1186/s13661-023-01764-9.

5. Adil N., Berdyshev A.S. Spectral properties of local and nonlocal problems for the diffusion-wave equation of fractional order // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. 2023. №.2(110). P.4–20. DOI: 10.31489/2023M2/4-20.

ON MODELING THE EFFECTS OF POLLUTION ON BIOLOGICAL SPECIES

Boboraximova M. I.
Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent,
kamina9314@mail.ru;

In this paper, a nonlinear spatial model is proposed and analyzed to study the effect of pollution on biological population. It is assumed that the pollutants enter into the environment not directly by the population but by a precursor produced by the population itself.

It is further assumed that larger the population, faster the precursor is produced, and larger the precursor, faster the pollutant is produced. Criteria for nonlinear stability and instability for both spatial and non-spatial models are obtained. The various parameter ranges for stable homogeneous solutions are identified. By the simulation experiments, it is observed that by applying an appropriate effort F , the population density P can be maintained at a higher equilibrium level. It is also shown that the equilibrium level of the concentration of precursor pollutant, concentration of pollutant in the environment and in the population decrease due to the effort F.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = r(u)P - \frac{r_0 P^2}{K(T)} + D_1 \nabla^2 P, \; \frac{\partial Q}{\partial t} = \gamma P - \gamma_0 Q,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = hQ - h_0 T + \theta_1 \delta_1 U - \alpha P T + D_2 \nabla^2 T,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\delta_1 U + \theta_0 h_0 T + \alpha P T, \; 0 \leq \theta_0, \theta_1 \leq 1.$$

We analyse the system with the following initial and boundary conditions:

$$P(x,y,0) = \phi(x,y) \geq 0, Q(x,y,0) = \psi(x,y) \geq 0, T(x,y,0) = \xi(x,y) \geq 0,$$

$$U(x,y,0) = \zeta(x,y) \geq 0, (x,y) \in D; \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial n} = 0, (x,y) \in \partial D, t \geq 0,$$

where n is the unit outward normal to ∂D We assume that the functions P, Q, T, U belong to the class $C^2(D)$.

In this work, we will first study some mathematical problems related to the existence and uniqueness of the solution of a mathematical problem. Next, we only establish the existence of a stationary state for the effects of toxicants on biological species and the stationary coexistence of toxicants and populations. We get some sufficient conditions for survival or extinction of biological species.

References

1. Marchuk G.I. Mathematical modeling in environmental problems, M.: Nauka, 1982.

2. Freedman H.I., Shukla J.B. 1991. Models for the effect of toxicant in single-species and predator-prey systems, Journal of Mathematical Biology, 30: 15-30

3. Takhirov J.O. On the parabolic-parabolic model of one ecological problem, Proceedings of the 11th All-Russian Scientific Conference "Mathematical Modeling and Boundary Value Problems". Volume 2. 2019.p.91-93.

QUALITATIVE PROPERTIES OF SOLUTIONS TO A NONLINEAR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION WITH POLYNOMIAL NONLINEARITIES

Borikhanov M. B.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
Institute of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh–Turkish University, Turkistan, Kazakhstan
borikhanov@math.kz, meiirkhan.borikhanov@ayu.edu.kz

In the present paper, we study the Cauchy-Dirichlet problem to a nonlocal nonlinear diffusion equation with polynomial nonlinearities

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{0|t}u + (-\Delta)^s_p u = \gamma|u|^{m-1}u + \mu|u|^{q-2}u,\ \gamma, \mu \in \mathbb{R},\ m > 0, q > 1,$$

involving time-fractional Caputo derivative $\mathcal{D}^{\alpha}_{0|t}, \alpha \in (0,1)$ for $u \in C^1([0,T])$ (see [1]) is defined by

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{0|t}u(t) = I^{1-\alpha}_{0|t}\frac{d}{dt}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}u'(s)\,ds,\ \ \forall t \in (0,T]$$

and p-Laplacian operator for $s \in (0,1), p > 1$ and $u \in W^{s,p}(\Omega)$, is represented by (see [2], Lemma 5.1)

$$(-\Delta)^s_p u(x) = C_{N,s,p}\,\text{P.V.}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}dy,$$

where

$$C_{N,s,p} = \frac{sp2^{2s-2}}{\pi^{\frac{N-1}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{N+sp}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(1-s)}$$

is a normalization constant and "P.V." is an abbreviation for "in the principal value sense".

We give a simple proof of the comparison principle for the considered problem using purely algebraic relations, for different sets of γ, μ, m and q.

The blow-up phenomena, existence of global weak solutions and asymptotic behavior of global solutions are classified using the comparison principle.

References

1. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J.: Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies (2006).

2. del Teso, F., Gymez-Castro, D., Vбzquez, J. L.: Three representations of the fractional p-Laplacian: Semigroup, extension and Balakrishnan formulas. Fract. Calc. Appl. Anal. **24**(4), 966–1002 (2021). DOI: 10.1515/fca-2021-0042.

INVERSE PROBLEM PSEUDOHYPERBOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Durdiyev D. Q.[1,2,a], **Saidova N. M.**[1,2,b]

[1]Bukhara branch of the institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan, M.Ikbol str. 11, Bukhara 200100, Uzbekistan,
e-mail: d.durdiev@mathinst.uz[a];
[2]Bukhara State University, M.Ikbol str. 11, Bukhara 200100, Uzbekistan,
e-mail: n.m.saidova@buxdu.uz[b]

Let $Q_T = \{(x,t)|\ 0 < x < 1,\ \ 0 < t \leq T\}$ be a rectangle domain. In this present paper, we consider the following inverse problems of determining a pair of functions $\{v(x,t), K(t)\}$, which satisfy the 1D pseudohyperbolic integrodifferential equation

$$v_{tt} - v_{xxt} - v_{xx} + \int\limits_0^t K(t-\tau)v_{xx}(x,\tau)d\tau = f(x,t), \tag{1}$$

the initial conditions

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad v_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{2}$$

the boundary conditions

$$v(0,t) = v(1,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{3}$$

and the overdetermination condition

$$v\left(x_0, t\right) = h(t),\ t \in [0,T], \quad x_0 \in (0,1). \tag{4}$$

The problem of determining $v(x,t) \in Y_T := C^{2,2}_{x,t}\left(Q_T\right) \cap C^1\left(\overline{Q}_T\right)$ from (1)-(3) with given $\varphi(x), \psi(x)$ and $K(t)$ is called the direct problem for a 1D pseudohyperbolic integrodifferential equation (1).

Definition. The pair of the functions $\{v(x,t), K(t)\}$ is called a classical solution (see [2]) to the inverse problem, if $v(x,t) \in Y_T,\ K(t) \in C[0,T]$ and functions $v(x,t),\ K(t)$ satisfy the system of equations (1)-(4) in the usual sense.

The function $\varphi(x), \psi(x)$ and $f(x,t)$ satisfy the following assumptions: A1) $\varphi \in C^6[0,1]$, $\varphi^{(7)} \in L_2(0,1) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(1) = 0$, $\varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(1) = 0$, $\varphi^{(6)}(0) = \varphi^{(6)}(1) = 0$;

A2) $\psi \in C^4[0,1]$, $\psi^{(5)} \in L_2(0,1)$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\psi^{(2)}(0) = \psi^{(2)}(1) = 0$, $\psi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(1) = 0$.

A3) $f_{xx}(x,t) \in C\left(Q_T\right), f_{xxx}(x,t) \in L_2(Q_T) :\ f(0,t) = f(1,t) = f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t) = 0,\ \ t \in [0,T]$.

A4) $h \in C^2[0,l]$; $\varphi\left(x_0\right) = h(0)$, $\psi\left(x_0\right) = h'(0)$, $f(x_0,0) + \varphi''(x_0) + \psi''(x_0) = h''(0)$.

Theorem. Let A1)-A5) be satisfied. Then there exists a number $T^* \in (0,T)$, such that there exists a unique solution $K(t) \in C[0,T^*]$ of the inverse problem (1)-(4).

INITIAL VALUE PROBLEM FOR A FRACTIONAL WAVE EQUATION WITH A GENERALISED RIEMANN-LIOUVILLE TIME DERIVATIVE

Durdiev D. K.[1], **Turdiev H. H.**[2]
Bukhara branch V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Bukhara;
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan,
[1] d.durdiev@mathinst.uz [2] h.turdiev@mathinst.uz

In the domain $D = \{(x,t) : x \in \mathbb{R},\ t > 0\}$, we consider the Cauchy problem for the following generalized time-fractional diffusion equation:

$$D^{\alpha,\beta}_{0+,t}u(x,t) - u_{xx} + q(t)u(x,t) = f(x,t),\ t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

with the initial conditions of Cauchy type

$$I^{(2-\alpha)(1-\beta)}_{0+,t}u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_1(x),\ \frac{\partial}{\partial t}\left(I^{(2-\alpha)(1-\beta)}_{0+,t}u\right)(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_2(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

where $D^{\alpha,\beta}_{0+,t}$ is the generalized Riemann-Liouville (Hilfer) fractional derivative of order $1 < \alpha < 2$ and type $0 \le \beta \le 1$ [1], $I^{\rho}_{0+,t},\ \ \rho \in (0,1)$ is the Riemann–Liouville fractional integral (see [2], pp. 69-72), The functions $f(x,t)$, $\varphi_i(x),\ i = 1,2$ are known functions.

The initial-boundary problem and inverse problems for fractional differential equations have been studied in many research works [3]-[4]. The existence and uniqueness of the solution to the problem is proved

We use the weighted spaces of continuous functions (see [2], pp. 4-5, 162-163).

$$C_\gamma[a,b] := \{g : (a,b] \to \mathbb{R} : (t-a)^\gamma\, g(t) \in C[a,b],\ 0 \le \gamma < 1,\},$$

$$C^{2,\alpha,\beta}_{\gamma}(\Omega) = \Big\{u(x,t) :\ u(\cdot,t) \in C^2(0,1);\ t \in [0,T] \text{ and}$$

$$D^{\alpha,\beta}_{0+,t}u(x,\cdot) \in C_\gamma(0,T];\ x \in \mathbb{R},\ 1 < \alpha \le 2,\ 0 \le \beta \le 1\Big\}.$$

Theorem. If $f(x,t) \in C_\gamma\left([0,T], H^{l+2}(\mathbb{R})\right),\ l \in (0,1),\ \varphi_i(x) \in H^{l+4}(\mathbb{R}),\ i = 1,2,$ $q(t) \in C[0,T]$, then there exists a unique solution of the problem (1)-(2) such that $u(x,t) \in C^{2,\alpha,\beta}_{\gamma}(D_T)$.

References

1. Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific: Singapore, 2000.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differetial equations, North-Holland Mathematical Studies, Amsterdam: Elsevier, 2006.

3. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives // Fract. Calc. Appl. Anal., 2009, Vol. 12 No.3, pp. 299-318.

4. Turdiev H.H. Inverse coefficient problems for a time-fractional wave equation with the generalized Riemann-Liouville time derivative // Russian Mathematics 2023, 10, 46-59.

AN INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE KERNEL OF FRACTIONAL PSEUDO-INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Elmuradova H. B.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan,
h.b.elmurodova@buxdu.uz

Let $T > 0$ be fixed number and $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T\}$.

Consider the inverse problem of determining of functions $\{u(x,t), k(t)\}$ such that are satisfy following the equations:

$$\begin{cases} u_t - \partial_t^\beta u_{xx} - u_{xx} = \int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t), (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ \int_0^1 \omega(x)u(x,t)dx = h(t). \end{cases} \tag{1}$$

Where ∂_t^β is the Caputo fractional derivative of order $\beta \in (0,1)$ in the time variable, defined by

$$\partial_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau,$$

and $k(t)$, $t > 0$ is the kernel, $f(x,t)$ is the known source term, $\varphi(x)$ is the initial temperature.

Lemma. *Problem (1) is equivalent to the auxiliary problem of determining the functions $\vartheta(x;t), k(t)$ from the following equations:*

$$\begin{cases} \vartheta_t - \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\vartheta_{xx} - \vartheta_{xx} = \varphi(x)k(t) + \int_0^t k(\tau)\vartheta(x,t-\tau)d\tau + f_t,\ (x,t) \in Q_T, \\ (\vartheta(x,t) - I_{0+,t}^{1-\beta}\vartheta_{xx})\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,1], \\ \vartheta(x,t)\big|_{x=0} = \vartheta\big|_{x=1} = 0, \quad t \in [0,T] \\ \int_0^1 \omega(x)\vartheta(x,t)dx = h'(t). \end{cases} \tag{2}$$

where $\psi(x) = \varphi'(x) + f(0,x)$, $\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}$ is the Riemann-Liouville fractional derivative of order $\beta \in (0,1)$ in the time variable [1].

Let $[a,b](-\infty < a < b < \infty)$ finite interval and $\gamma \in \mathbf{C}(0 \leq \mathbf{R}(\gamma) < 1)$. We introduce the weighted space $C_\gamma[a,b]$ of functions f given on $(a,b]$, such that the function $(x-a)^\gamma f(x) \in C[a,b]$, and

$$||f||_{C_\gamma} = ||(x-a)^\gamma f(x)||_C, C_0[a,b] = C[a,b].$$

Theorem. *Let $\psi \in C^3[0,1]$ and $\psi'''(x) \in L^2(0,1)$ with*

$$\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0;$$

$f \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ and $f_{xxx}(cdot,t) \in L^2(0,1)$ for any $t \in [0,T]$ with

$$f(0,t) = f(1,t) = f''(0,t) = f''(1,t) = 0.$$

are satisfied. Let, $h \in C^1[0,T]$ and $\beta < \gamma + \beta \leq 1$. Then exists a number $T^* \in (0,T)$, such that there exists a unique solution $k(t) \in C_\gamma[0,T^*]$ of the inverse problem (2).

HEAT EQUATION ON METRIC STAR GRAPHS WITH VERTEX CONDITIONS

Eshimbetov M.R.[1], **Otaboyev Sh.I.**[2]
[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan; mr.eshimbetov92@gmail.com
[2]University of Exact and social sciences, Tashkent region, Uzbekistan; sh.otaboyev@gmail.com

Consider simple metric graph Γ with three semi infinite bonds connected on the point O. The point O called to be a vertex of the graph. We label the bonds of the graph as B_j,$j = \overline{1,3}$. Define coordinate x_j on the bond B_j for $j = \overline{1,3}$ corresponding it to the intervals $(0,\infty)$. At each bond the vertex point O has a coordinate 0. Further we will use x instead of x_j.

We consider the equations of heat equation in each bond of the given graph

$$q_t^{(j)}(x,t) = q_{xx}^{(j)}(x,t),\ j = \overline{1,3} \tag{1}$$

with initial conditions

$$q^{(j)}(x,0) = q_0^{(j)}(x),\ \ x \in B_j,\ j = \overline{1,3}, \tag{2}$$

the asymptotic conditions

$$\lim_{x\to\infty} q^{(j)}(x,t) = 0,\ t \geq 0,\ j = 1,2,3. \tag{3}$$

Moreover, we need to define the following gluing conditions for connectivity of the graph

$$q^{(1)}(0,t) = q^{(2)}(0,t) = q^{(3)}(0,t), \sum_{j=1}^{3} q_x^{(j)}(0,t) = f(t)q^{(j)}(0,t). \tag{4}$$

The last conditions usually called continuity and flux conservation (Kirchhoff) conditions on branching point of the graphs.

We suppose, that initial data are smooth enough functions and they satisfies the conditions (3)-(4).

We solve the above problem using the Fokas method. This method uses generalized Fourier transformation defined in [1-2]. The uniqueness of the solution proved by the method of energy integrals.

Acknowledgments. This work is partly supported by a grant of the FL–8223102079. The research of M.R.Eshimbetov supported by the grant ref. (Grant №FL–8223102079, 2024–2028).

References

1. Sobirov, Z.A., Eshimbetov, M.R. Fokas Method for the Heat Equation on Metric Graphs. Journal of Mathematical Sciences, 278 (2024), 530–545.

2. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, 12(4), 412–420.

CONDITIONAL WELL-POSEDNESS OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF MIXED TYPE EQUATIONS

Fayazov K. S.[1], Khajiev I. O.[2], Juraeva D. Sh.[3]
[1]Turin Polytechnic University in Tashkent, Uzbekistan,
kudratillo52@mail.ru;
[2,3]National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
kh.ikrom04@gmail.com; jurayevadildora1998@gmail.com

This work is devoted to the study of an ill-posed initial-boundary value problem for a system of mixed type equations. We consider the system of equations

$$\begin{cases} v_{tt} + sgn(x)v_{xx} + c_1 v = f(x,t), \\ u_{tt} + sgn(x)u_{xx} + c_2 u = v(x,t) \end{cases} \tag{1}$$

in the region $\Omega = \{(x,t) : -\pi < x < \pi,\ x \neq 0,\ 0 < t < T\}$ where $f(x,t)$ is a sufficiently smooth heat source function, c_i are any constants, $i = 1,2$.

Statement of Problem. Find a pair of functions $(v(x,t), u(x,t))$ satisfying the system of equations (1), initial

$$\begin{matrix} v(x,0) = \varphi_1(x),\ v_t(x,0) = \varphi_2(x), \\ u(x,0) = \psi_1(x),\ u_t(x,0) = \psi_2(x), \end{matrix} \quad -\pi \leq x \leq \pi, \tag{2}$$

boundary

$$v|_{x=\pm\pi} = 0,\ u|_{x=\pm\pi} = 0,\ 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

and gluing

$$\begin{matrix} v|_{x=-0} = v|_{x=+0},\ v_x|_{x=-0} = -v_x|_{x=+0}, \\ u|_{x=-0} = u|_{x=+0},\ u_x|_{x=-0} = -u_x|_{x=+0}, \end{matrix} \tag{4}$$

conditions, where $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ - are sufficiently smooth given functions, $i = 1,2$

In this paper, the solution of the problem (1)-(4) is constructed by the separable method and the ill-posed initial-boundary value problem (1)-(4) is studied for conditional correctness, i.e. theorems on uniqueness and conditional stability are proved. Then, regularized approximate solution is constructed on the set of correctness.

References

1. Fayazov K.S., Khajiev I.O., Conditional correctness of the initial-boundary value problem for a system of high-order mixed-type equations, Russian Math. (Iz. VUZ), 66:2 (2022), 53–63. (in Russian)

2. Pyatkov S.G., Properties of eigenfunctions of a spectral problem and their applications, in: Well-Posed Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics, Institute of Mathematics, Novosibirsk 1984, 115–130. (in Russian)

THE DESCRIPTIONS OF SOME SOLVABLE n-LIE ALGEBRAS WITH HYPONILPOTENT IDEAL

Gaybullaev R.Kh.[1], **Solijanova G.O.**[2],**Urazmatov G.Kh.**[3]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan[1,2,3]
r_gaybullaev@mail.ru, gulhayo.solijonova@mail.ru, gulmurod0405@mail.ru

A vector space $\mathcal{N}$ over a field $\mathbb{F}$ is an n-Lie algebra (sometimes called by Filippov algebra) provided that $\mathcal{N}$ is equipped with some n-ary multilinear operation $[-,-,\dots,-]$ satisfying the two identities

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = (-1)^{sign(\sigma)}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}],\ \sigma \in S_n,$$

$$[[x_1, x_2, \dots, x_n], y_2 \dots, y_n] = \sum_{i=1}^{n}[x_1, \dots, x_{i-1}, [x_i, y_2, \dots, y_n], x_{i+1}, \dots, x_n].$$

Definition 1. A nilpotent n-Lie algebra $\mathcal{N}$ satisfying the condition $dimT_{max} = dim(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$ is called of maximal rank.

Let $\mathcal{N}$ be an n-Lie algebra, and let $\mathcal{I}$ be an ideal of $\mathcal{N}$. Note that the notions of nilpotency of $\mathcal{I}$ as a subalgebra and nilpotency of $\mathcal{I}$ as an ideal differ in general.

Definition 2. Let $\mathcal{N}$ be an n-Lie algebra, and let $\mathcal{I}$ be an ideal of $\mathcal{N}$. If $\mathcal{I}$ is a nilpotent subalgebra that is not nilpotent as an ideal, then $\mathcal{I}$ is a hyponilpotent ideal of $\mathcal{N}$. If $\mathcal{I}$ is not a proper subset of another hyponilpotent ideal then $\mathcal{I}$ is a maximal hyponilpotent ideal of $\mathcal{N}$.

Let describe the most simple structure of nilpotent n-Lie algebra of maximal rank.

Theorem 1. Let $\mathcal{F}_m$ be an m-dimensional nilpotent n-Lie algebra with the condition $n = \dim T_{max} = \dim \mathcal{F}_m/\mathcal{F}_m^2$. Then $\mathcal{F}_m$ is unique (up to isomorphism) and it is isomorphic to an algebra with the following multiplication table:

$$\mathcal{F}_m : [e_i, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}] = e_{i+1},\ n \le i \le m-1,$$

where $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ is a basis of $\mathcal{F}_m$.

Now we consider solvable extensions of $\mathcal{F}_m$. Let $\mathcal{R}$ be a maximal solvable n-Lie algebra with a maximal hyponilpotent ideal $\mathcal{F}_m$. Then $\mathcal{R}$ can be expressed as the direct sum of $\mathcal{F}_m$ and a complementary subspace. Next, let us construct a solvable n-Lie algebra using the maximal torus of $\mathcal{F}_m$.

Theorem 2. Let $\mathcal{R} = \mathcal{F}_m \rtimes T_{max}$ be a maximal solvable n-Lie algebra with given hyponilpotent ideal $\mathcal{F}_m$ and let T_{max} be a maximal torus of $\mathcal{F}_m$. Then $\mathcal{R}$ is unique (up to isomorphism), and it is isomorphic to an algebra with the following multiplications table:

$$\begin{cases} [e_i, e_1, ..., e_{n-1}] = e_{i+1}, & n \le i \le m-1, \\ [x, e_2, ..., e_{n-1}, e_1] = e_1, & \\ [x, e_2, ..., e_{n-1}, e_i] = (i-n)e_i, & n+1 \le i \le m, \\ [y, e_2, ..., e_{n-1}, e_i] = e_i, & n \le i \le m \end{cases}$$

where $\{e_1, \dots e_m, x, y, z\}$ is a basis of $\mathcal{R}$.

SOLUTION OF SOME NON-LOCAL PROBLEM FOR MIXED EQUATION WITH SECOND ORDER

Gurbanov P. G.[1], **Chashemov M. B.**[2]
International University for the Humanities and Development, Ashgabat, Turkmenistan,
[1]pirgurban@gmail.com; [2]chashemovmyrat@gmail.com

It is considered hyperbolic equation

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad y < 0, \tag{1}$$

in the area which is bounded by characteristics

$$x + y = 0, \quad x - y = 1 \quad \text{and} \quad y = 0. \tag{2}$$

Theorem 1. The hyperbolic equation (1) with characteristics (2) can be solved with non-local boundary conditions

$$\begin{cases} u(x;0) = \tau(x) \\ \sum\limits_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u\left(\frac{x+2i}{2n}; -\frac{x+2i}{2n}\right) + \sum\limits_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} u\left(\frac{-x+2n-2i-1}{2n}; -\frac{x+2i+1}{2n}\right) = \phi(x), \end{cases} \tag{3}$$

where $\tau(x)$, $\phi(x)$ are twice differentiable functions, $\lfloor x \rfloor$ is greatest integer number that not exceed real number x.

REFERENCES

1. Gurbanov P. Some non-local problem for mixed equation with second order. Conference Functional Differential Equations and Applications, Ariel University, Israel, 2019
2. Soltanov H., Gurbanov P. Solution of some non-local problems of vibrating string equation //Scientific-theoretical journal of the Academy of Sciences of Turkmenistan, Ylym, 2022, 74 p.
3. Soltanov H., Gurbanov P. Solution of some nonlocal problems of Parabola-hyperbolic equation //Science and Technology of Youth, Ylym, 2021, 62 p.
4. Karatoprakliev G. On some boundary problems for equation $u_{xx} - u_{yy} = 0$, //Thesis of Academy of Science SSSR, -1963. -T 149. , Vol. 6,1253-1256 p.
5. Aczel J. Lectures on functional equations and their applications, New-York.: Academic Press inc, 1966.

REGULARITY OF A SEPARABEL QUADRATIC OPERATOR

Khamdamkulova S.I.[1], **Polvonov J.I.**[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
sevinchxamdamkulova@gmail.com
Kharshi State University, Kharshi, Uzbekistan;
polvanovjavlon11@gmail.com

Let $S^{m-1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \;\; \forall i \in E, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$ be the $m-1$- dimensional simplex. A map $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ is called a *quadratic stochastic operator*(QSO) if

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, \ldots, m \tag{1}$$

$$\text{where,} \quad p_{ij,k} \geq 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^m p_{ij,k} = 1 \quad \text{for any} \quad i, j, k = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

A point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is called a *fixed point* of a QSO V if $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ and we denote the set of all fixed points by $\mathrm{Fix}\,(V)$. The *trajectory* $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0,1,\ldots}$ of V for a $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ is defined by $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

A QSO V is said to be *regular* if the limit $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x})$ exists for any $\mathbf{x} \in S^{m-1}$.

Separable QSOs were introduced as: The QSO (1), (2) with additional condition

$$p_{ij,k} = a_{ik} b_{jk} \quad \text{for all} \quad i, j, k \in E \tag{3}$$

where $a_{ik}, b_{jk} \in \mathbb{R}$ entries of matrices $A = (a_{ik})$ and $B = (b_{jk})$ such that the conditions (2) are satisfied for the coefficients (3). Then QSO V with the coefficients (3) has the form

$$x'_k = (V(\mathbf{x}))_k = (A(\mathbf{x}))_k \, (B(\mathbf{x}))_k, \quad k \in E, \tag{4}$$

where $(A(\mathbf{x}))_k = \sum\limits_{i=1}^m a_{ik} x_i$, $(B(\mathbf{x}))_k = \sum\limits_{i=1}^m b_{jk} x_j$.

Definition. The QSO (4) is called a Separable Quadratic Stochastic Operator (SQSO).

Let $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ and $\mathbf{c} = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Consider the following SQSO defined on the S^2

$$V : \begin{cases} x'_1 = \left(x_1 + (\sqrt{3}-1)x_2\right)\left(x_1 + (\sqrt{3}-1)x_3\right), \\ x'_2 = \left(x_2 + (\sqrt{3}-1)x_1\right)\left(x_2 + (\sqrt{3}-1)x_3\right), \\ x'_3 = \left(x_3 + (\sqrt{3}-1)x_1\right)\left(x_3 + (\sqrt{3}-1)x_2\right). \end{cases} \tag{6}$$

Theorem. For the SQSO V (6) the following statements are hold:

(i) $\mathrm{Fix}\,(V) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{c}\}$;

(ii) the vertices $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ are saddle points and the center $\mathbf{c}$ is an attracting point;

(iii) The function $\varphi(\mathbf{x}) = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1|$ is a Lyapunov function;

(iv) There are γ_i, $i = 1, 2, 3$ smooth curves such that if $\mathbf{x}^{(0)} \in \gamma_i$ then $\lim\limits_{n\to\infty} V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{e}_i$.

(v) For any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \setminus (\mathrm{Fix}\,(V) \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3)$ we have $\lim\limits_{n\to\infty} V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{c}$.

SOLVING THE CAUCHY PROBLEM USING THE HANKEL TRANSFORM METHOD

Hasanov A.[1], Yuldashova H. A.[2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent;
anvarhasanov@yahoo.com[1]; hilolayuldashova77@gmail.com[2]

In this paper, we aim to study the Cauchy problem posed for a fractional order equation. The solution consists of the Bessel function and the Mittag-Leffler function. Unknown coefficients are found by Hankel transformation. It is shown that the constructed solution satisfies the initial conditions and equation.

We consider the following a time-fractional order equation

$$ {}^{RL}D_{0t}^{\alpha}u\left(x,t\right)=u_{xx}\left(x,t\right)+\frac{\nu}{x}u_{x}\left(x,t\right),\ \nu\in(0,2)\setminus\{1\},\ 1<\alpha\leq 2, \tag{1} $$

in a domain $\Omega=\{(x,t):\ x>0,\ t>0\}$. Here ${}^{RL}D_{0t}^{\alpha}$ is the Riemann–Liouville fractional derivative operator of order α defined by

$$ {}^{RL}D_{0t}^{\alpha}f\left(t\right)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left\{{}^{\mathrm{RL}}I_{0t}^{n-\alpha}f\left(t\right)\right\},\quad Re\left(\alpha\right)\geq 0,\ \ n=\left[Re\left(\alpha\right)\right]+1, \tag{2} $$

and

$$ {}^{\mathrm{RL}}I_{0t}^{\alpha}f\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{0}^{t}\left(t-\xi\right)^{\alpha-1}f\left(\xi\right)d\xi,\quad t>0,\ \ Re\left(\alpha\right)\geq 0, \tag{3} $$

represents Riemann–Liouville fractional integral.

Cauchy problem. It is required to find in the domain Ω a regular solution to equation (1) satisfying the following initial conditions

$$ {}^{RL}D_{0t}^{\alpha-1}u\left(x,t\right)\Big|_{t=0}=\varphi\left(x\right),\quad {}^{RL}D_{0t}^{\alpha-2}u\left(x,t\right)\Big|_{t=0}=\psi\left(x\right),\quad 0<x<\infty, \tag{4} $$

and for any fixed t we have $\lim\limits_{x\to\infty}u\left(x,t\right)=0$, where

$$ \varphi\left(x\right),\ \ \psi\left(x\right)\ \in C^{2},\quad \int_{0}^{\infty}\left|\varphi\left(x\right)\right|x^{\frac{\nu}{2}}dx<c=const,\ \int_{0}^{\infty}\left|\psi\left(x\right)\right|x^{\frac{\nu}{2}}dx<c=const, $$

in addition to this

$$ \varphi\left(0\right)=\psi\left(0\right)=0,\ \ \lim_{x\to\infty}\varphi\left(x\right)=0,\quad \lim_{x\to\infty}\psi\left(x\right)=0. \tag{5} $$

The solution to the problem is as follows:

$$ u\left(x,t\right)=\frac{x^{\frac{1-\nu}{2}}t^{\alpha-1}}{2}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\rho^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\varphi\left(\rho\right)E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda^{2}t^{\alpha}\right)+\psi\left(\rho\right)t^{-1}E_{\alpha,\alpha-1}\left(-\lambda^{2}t^{\alpha}\right)\right) $$

$$ \times\left(J_{\frac{\nu-1}{2}}\left(\rho\lambda\right)J_{\frac{\nu-1}{2}}\left(\lambda x\right)+J_{\frac{1-\nu}{2}}\left(\rho\lambda\right)J_{\frac{1-\nu}{2}}\left(\lambda x\right)\right)\rho\lambda d\rho d\lambda. \tag{6} $$

AN OPTIMAL QUADRATURE FORMULA FOR NUMERICAL INTEGRATION OF OSCILLATING FUNCTIONS IN A HILBERT SPACE

Hayotov A. R.[1]**, Kurbonnazarov A. I.**[2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;
hayotov@mail.ru[1]; mumin_1974@inbox.ru[2]

In this work, the problem of constructing an optimal quadrature formula in the sense of Sard based on the functional approach for the numerical calculation of the approximate integration of rapidly oscillating functions is considered. In this work, we mainly consider the problem of the approximate calculation of Fourier integrals. For this, we first solve the boundary value problem for the extremal function of the considered quadrature formula. When solving a boundary value problem, we find the fundamental solution of the given differential operator using direct and inverse Fourier transforms. Using the extremal function, we find the form of the norm of the error functional of the quadrature formula. The norm of the error functional depends on the coefficient and node points. We find the minimum value of the norm of the error functional with the given nodes and coefficients. Thus, we get the optimal quadrature formula in the Hilbert space $\mathrm{K}_2^{(3)}$. The order of approximation of the obtained quadrature formula is $O(h^3)$ and the formula is exact to hyperbolic functions $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ and constants. We show the advantage of the constructed optimal quadrature formula over classical quadrature formulas.

Taking numerical results for the constructed optimal quadrature formula, we show that the constructed formula is useful for the approximate calculation of Fourier integrals.

References

1. Hayotov A.R., Milovanović G. V., Shadimetov Kh.M.. Optimal Quadrature Formulas and Interpolation Splines Minimizing the Semi-Norm in the Hilbert Space $K_2(P_2)$. Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions. – 2014. – P. 573–611.

2. Shadimetov Kh. M., Hayotov A.R. and Bozarov B. Optimal quadrature formulas for oscillatory integrals in the Sobolev space. Journal of Inequalities and Applications, 103(2022), - pp. 1–21. https:doi.org/10.1186/s13660-022-02839-4.

3. Hayotov A.R., Kurbonnazarov A.I. An optimal quadrature formula for the approximate calculation of Fourier integrals in the space $K_2^{(3)}(0,1)$. Problems of computational and applied mathematics. No. 3/1(50) 2023, pp.183-196.

PROPERTIES OF $A(z)$–HARMONIC MEASURE OF A BOUNDARY SET

Husenov B.E., Habibova D.R.

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan,
[1]b.e.husenov@buxdu.uz, [2]habibovadilnavoz@mail.ru.

Let $A(z)$ be an antianalytic function, i.e. $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ in the convex domain $D \subset \mathbb{C}$; moreover, let $|A(z)| \le c < 1$ for all $z \in D$. The function $f(z)$ is said to be $A(z)$*–analytic* in the domain D if for any $z \in D$, the following equality holds:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

We denote by $O_A(D)$ the class of all $A(z)$–analytic functions defined in the domain D. According to, the function $\psi(\xi, z) = z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}$ is an $A(z)$–analytic function, where $\gamma(\xi, z)$ is a smooth curve which points of $\xi, z \in D$. The following set is an open subset of arbitrary convex domain D: $L(a, r) = \{|\psi(a, z)| < r\}$. For sufficiently small $r > 0$, this set compactly lies in D (we denote this fact by $L(a, r) \subset\subset D$) and contains the point a. This set $L(a, r)$ is called the $A(z)$–lemniscate centered at the point a.

$A(z)$–harmonic functions are described in detail in [1]. The class of $A(z)$–harmonic functions in the domain of D is denoted as $h_A(D)$. $\omega(z, M, L(a, r)) \in h_A(L(a, r))$ is defined very simply, according to the Poisson formula. If

$$\aleph_M(\zeta) = \begin{cases} -1, & \zeta \in M, \\ 0, & \zeta \in \partial L(a,r) \backslash M \end{cases}$$

is a characteristic function of the set $M \subset \partial L(a, r)$, then $A(z)$–harmonic measure

$$\omega(z, M, L(a,r)) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} \frac{r^2 - |\psi(a,z)|^2}{|\psi(\zeta,z)|^2} \aleph_M(\zeta) \big|d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}\big|.$$

Note that for $A(z)$–harmonic measure $\omega(z, M, L(a, r))$ is satisfied by the following inequality: $-1 \le \omega(z, M, L(a, r)) \le 0$.

Theorem 1. *The function $\omega(z, M, L(a, r))$ either does not vanish anywhere,*

$$\omega(z, M, L(a, r)) < 0,$$

or is identically zero,

$$\omega(z, M, L(a, r)) \equiv 0.$$

$\omega(z, M, L(a, r)) \equiv 0$ *if and only if the bounded set $M \subset \partial L(a, r)$ has measure zero, $mesM = 0$.*

References

1. Zhabborov N.M., Otaboyev N.U., Khursanov Sh.Y., The Schwartz inequality and the Schwartz formula for A–analytic functions. Journal of Mathematical Sciences, 2022, volume 264, issue 6, pp. 703–714.

TWO PURSUERS AND ONE EVADER EVASION DIFFFERENTIAL GAME

Ibragimov G. I.[1], **Tursunaliev T. G.**[2]
[1,2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,
[1]gofurjon.ibragimov@tsue.uz; [2]toychivoytursunaliyev@gmail.com

Statement of problem. We study an evasion linear differential game of two pursuers x_1, x_2 and one evader y that move in space $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Whose dynamics are described by the following equations:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = -\lambda x_i + u_i, \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad |u_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \\ &\dot{y} = -\lambda y + v, \qquad\quad y(0) = y_0, \quad |v| \leq \sigma, \end{aligned} \tag{1}$$

where $x_i, x_{i0}, y, y_0, u_i, v \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$; $x(0) = x_{i0}$ and $y(0) = y_0$ are the initial positions, it is assumed that $x_{i0} \neq y_0$, $i = 1, 2$, and σ, $\sigma > 1$ is a given number, here u_i is the control parameter of pursuer x_i, and v is that of evader y.

Definition 1. Measurable functions $u_i(\tau)$, $|u_i(\tau)| \leq 1$, and $v(\tau)$, $|v(\tau)| \leq \sigma$, $\tau \geq 0$, are called controls of the pursuer x_i, $i \in \{1, 2\}$, and the evader y, respectively.

Definition 2. A function $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{5d} \to \mathbb{R}^d$,

$$(\tau, \varphi_1, \varphi_2, y, x_1, x_2, u_1, u_2) \to V(\tau, \varphi_1, \varphi_2, y, x_1, x_2, u_1, u_2)$$

is called strategy of the evader, if for any admissible controls $u_1 = u_1(\tau)$, $u_2 = u_2(\tau)$ of pursuers and $\varphi_1 = \varphi_1(\tau)$, $\varphi_2 = \varphi_2(\tau)$ the following initial value problem

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = -\lambda x_i + u_i, \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \\ &\dot{y} = -\lambda y + V(\tau, \varphi_1, \varphi_2, y, x_1, x_2, u_1, u_2), \quad y(0) = y_0, \end{aligned}$$

has a unique solution $(y(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau))$, where $\varphi_1(\tau)$ and $\varphi_2(\tau)$, $\tau \geq 0$ are given functions.

Note that pursuers apply any controls during the game, while the evader applies a strategy.

Definition 3. We say that evasion is possible in game (1) if there exists a strategy V of evader such that, for any controls of pursuers, we have $x_i(\tau) \neq y(\tau)$ for all $\tau \geq 0$ and $i = 1, 2$.

Problem. Construct a strategy V for the evader, for which evasion is possible in game (1).

Theorem. For any initial positions of players, evasion is possible in game (1).

References

1. Azamov A.A., Ibaydullaev T., Ibragimov G.I. Differential game with slow pursuers on the edge graphs of a simplex. International Game Theory Review. 2020. Vol. 23, 4. Pp. 225–237.

2. Ibragimov G.I., Tursunaliev T.G., and Shravan L. Evasion in a linear differential game with many pursuers. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2024. Vol. 29, 12. Pp. 4925–4945.

3. Isaacs R. Differential games. John Wiley & Sons.: New York, NY, USA. 1965.

SOLVABILITY TO A MULTI-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

Imanchiyev A. E.
K.Zhubanov Aktobe regional university, Aktobe, Kazakhstan,
Imanchievae@gmail.com

We consider the following multi-point boundary value problem for a third order differential equation

$$\frac{d^3z}{dt^3} = A_1(t)\frac{d^2z}{dt^2} + A_2(t)\frac{dz}{dt} + A_3(t)z + f(t), \qquad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\Big\{\alpha_{i1}\frac{d^2z(t_i)}{dt^2} + \beta_{i1}\frac{dz(t_i)}{dt} + \gamma_{i1}z(t_i)\Big\} = d_1, \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\Big\{\alpha_{i2}\frac{d^2z(t_i)}{dt^2} + \beta_{i2}\frac{dz(t_i)}{dt} + \gamma_{i2}z(t_i)\Big\} = d_2, \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\Big\{\alpha_{i3}\frac{d^2z(t_i)}{dt^2} + \beta_{i3}\frac{dz(t_i)}{dt} + \gamma_{i3}z(t_i)\Big\} = d_3, \tag{4}$$

where functions $A_j(t)$, $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, $j = 1,2,3$, and α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik}, d_k are constants, $i = \overline{0,m}$, $k = 1,2,3$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_m = T$.

A function $z(t) \in C([0,T],R)$ having derivatives

$$\frac{dz(t)}{dt} \in C([0,T],R), \quad \frac{d^2z(t)}{dt^2} \in C([0,T],R), \quad \frac{d^3z(t)}{dt^3} \in C((0,T),R)$$

is called a solution to problem (1)–(4) if it satisfies differential equation (1) for all $t \in (0,T)$ and meets the multi-point boundary conditions (2)–(4).

The present report is devoted to investigate of the existence unique solution of the multi-point boundary value problem for ordinary differential equation of third order (1)–(4) and ways of its solving.

The sufficient conditions of solvability to problem (1)–(4) are established in the terms of the coefficients of the differential equation $A_i(t)$, $i = 1,2,3$, and the date of boundary conditions α_{jk}, β_{jk}, γ_{jk}, $j = \overline{0,m}$, $k = 1,2,3$. Algorithms of finding approximate solutions to problem (1)–(4) are constructed and is proved their convergence to the exact solution of considering multi-point problem for differential equation third order. The results of this report will be used for the study of nonlocal multi-point boundary value problems for partial differential equations of third order.

The author was supported by the grant no. AP19675358 Ministry of Science and Higher Education of Republic of Kazakhstan.

References

1. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Comput. Math. Math. Phys. 1989. V.29, № 1, P. 34–46.

2. Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. Well-posedness of linear multi-point boundary value problem // Mathematical Journal. 2005. V. 5, № 1, P. 30–38. [in Russian]

NUMERICAL ANALYSIS OF INVERSE PROBLEMS FOR DIFFUSION EQUATION WITH INITIAL-BOUNDARY AND OVERDETERMINATION CONDITIONS

Jumaev J. J.
Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy
at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
jonibekjj@mail.ru

We consider the initial-periodic boundary problem for the time-fractional diffusion equation

$$\partial_t^\alpha u - u_{xx} + a(t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0,l], \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t), \quad u_x(0,t) = u_x(l,t), \varphi(0) = \varphi(l), \quad \varphi'(0) = \varphi'(l), t \in [0,T], \tag{3}$$

where $a(t), t > 0$ are the source control terms, $f(x,t)$ is known source term, $\varphi(x)$ is the initial temperature, T is arbitrary positive number and $D_T := \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\})$. The Caputo fractional derivative of order α is determined by the formula

$$\partial_t^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad \partial_t^1 u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

where $\alpha \in (0,1), \Gamma(\cdot)$ is the Euler's Gamma function.

The problem of determining a function $u(x,t), (x,t) \in D_T$, that satisfies (1)-(3) with known functions $a(t), f(x,t)$ and $\varphi(x)$ will be called the direct problem.

In the inverse problem, it is assumed that the coefficient $a(t), t > 0$ in (1) is unknown and it is required to determine it using additional information about the solution of the direct problem:

$$u_x(0,t) = h(t), \quad x \in [0,l], \tag{4}$$

or

$$\int_0^l \omega(x)u(x,t)dx = h(t), \quad x \in [0,l], \tag{5}$$

where $\omega(x)$, $h(t)$ are given functions.

In the sequel, we will call the problem of determining functions $u(x,t), a(t)$ from equations (1)-(4) as **inverse problem 1** and the problem of determining functions $u(x,t), a(t)$ from equations (1)-(3), (5) as **inverse problem 2**.

The work proposes both numerically, and analytically solving the inverse problem of identifying the coefficient of the left-hand side of the time-dependent fractional diffusion equation with initial-periodic boundary and over-determination conditions. Firstly, we investigate the theoretical approach to clarify the existence and uniqueness of the inverse problems. In the numerical process, the finite difference and numerical methods for fractional integral and derivatives are employed. Numerical results for some test examples are presented and discussed to illustrate the accuracy and stability of the numerical inversion.

ON THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR SYSTEMS OF EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE OF THE FIRST ORDER

Juraev D. A.[1], Mammadzada N. M.[2]
[1]University of Economics and Pedagogy, Karshi, Uzbekistan,
juraevdavron12@gmail.com;
[2]State Oil Company of the Azerbaijan Republic, Baku, Azerbaijan,
mammadzadanazira@gmail.com

This paper deals with the solution of the Cauchy problem for the matrix factorization of the Helmholtz equation in bounded and unbounded domains. Based on the constructed Carleman matrix, a regularized solution of the Cauchy problem for the matrix factorization of the Helmholtz equation in various spatial bounded and unbounded domains is constructed in explicit form.

The theory of ill-posed problems is a direction of mathematics which has developed intensively in the last two decades and is connected with the most varied applied problems: interpretation of readings of many physical instruments and of geophysical, geological, and astronomical observations, optimization of control, management and planning, synthesis of automatic systems, etc. Development of the theory of ill-posed problems was occasioned by the advent of modern computing technology. For the last decades, interest in classical ill-posed problems of mathematical physics has remained. This direction in the study of the properties of solutions of the Cauchy problem for the Laplace equation was started in [1]-[2] and subsequently developed in [3]. In many well-posed problems for systems of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients that factorize the Helmholtz operator, it is not possible to calculate the values of the vector function on the entire boundary. Therefore, the problem of reconstructing the solution of systems of equations of first order elliptic type with constant coefficients, factorizing the Helmholtz operator (see, for instance [4]-[7]), is one of the topical problems in the theory of differential equations.

References

1. Lavrent'ev M.M. On some ill-posed problems of mathematical physics. Novosibirsk.: Nauka, 1962.

2. Yarmukhamedov Sh. On the Cauchy problem for the Laplace equation, Reports of the USSR Academy of Sciences. 1977. V.235, №2, pp. 281–283.

3. Tarkhanov N.N. The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. berlin.: Akad. Verl., V.7, 1995.

4. Zhuraev D.A. Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation, Ukrainian Mathematical Journal. 2018. V.69, №10, pp. 1583–1592.

5. Juraev D.A. On the solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a multidimensional spatial domain. Global and Stochastic Analysis. 2022. V.9, №2, pp. 1–17.

6. Juraev D.A., Shokri A., Marian D. On an approximate solution of the Cauchy problem for systems of equations of elliptic type of the first order. Entropy. 2202. V.24, №7, pp. 1–18.

7. Juraev D.A., Shokri A., Marian D. Regularized solution of the Cauchy problem in an unbounded domain. Simmetry. V.14, №8, pp. 1–18.

ON A KATUGAMPOLA-PRABHAKAR FRACTIONAL-ORDER INTEGRAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS

Karimov E. T.[1], **Khasanov Sh.**[2]
[1]Ghent University, Ghent, Belgium,
erkinjon.karimov@ugent.be;
[2]Namangan Engineering Construction Institute, Namangan, Uzbekistan,
shohzodbekxasanov@gmail.com

In this talk we will discuss certain properties of the Katugampola-Prabhakar fractional-order integro-differential operator. We note that this operator will be introduced for the first time.

Let us first introduce the left- and right-side Katugampola-Prabhakar fractional integrals.

Definition 1. Let $\alpha, \beta, p \in \mathbb{R}^+$ and $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ also $f(x) \in L_1^p(a,b)$ where $0 \leq a < b \leq +\infty$. The following integrals represent the left- and right-sided Katugampola-Prabhakar fractional integrals of order β:

$$_{KP}I_{a+}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,p} f(x) := \int\limits_a^x \left(\frac{x^p - t^p}{p}\right)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(\delta\left(\frac{x^p - t^p}{p}\right)^{\alpha}\right) t^{p-1} f(t)\, dt, \quad x > a, \tag{1}$$

$$_{KP}I_{b-}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,p} f(x) := \int\limits_x^b \left(\frac{t^p - x^p}{p}\right)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(\delta\left(\frac{t^p - x^p}{p}\right)^{\alpha}\right) t^{p-1} f(t)\, dt, \quad x < b, \tag{2}$$

where $E_{a,b}^{c}(z)$ represents the Prabhakar function [1]. In particular case, one can obtain the Prabhakar fractional integral [1] and the Katugampola fractional integral [2].

Now, based on the Katugampola-Prabhakar fractional-order integral operators, we can introduce the corresponding integro-differential operators as follows.

Definition 2. Let $\alpha, \beta, p \in \mathbb{R}^+$ and $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $n-1 < \beta < n, n = [\beta]+1$, also $f(x)$ be a given function on $[a,b]$. The integrals

$$\begin{aligned} ^{KP}D_{a+}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,p} f(x) &:= \left(x^{1-p}\frac{d}{dx}\right)^n {}_{KP}I_{a+}^{\alpha,n-\beta,-\gamma,\delta,p} f(x), \ x > a, \\ ^{KP}D_{b-}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,p} f(x) &:= \left(-x^{1-p}\frac{d}{dx}\right)^n {}_{KP}I_{b-}^{\alpha,n-\beta,-\gamma,\delta,p} f(x), \ x < b \end{aligned} \tag{3}$$

represent left- and right-sided Katugampola-Prabhakar derivatives of order β.

We will prove certain properties of these operators, including semi-group properties of (1)-(2) and decomposition of them with (3).

References

1. Prabhakar R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel //Yokohama. Math. J. 1971, №19, P.7-15.

2. Katugampola U. N. New approach to a generalized fractional integral//Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. 2014, №4, P. 1-15.

CLASSICAL SOLUTION OF A PROBLEM OF THE LONGITUDINAL IMPACT ON A ROD WITH A MOVING BOUNDARY

Korzyuk V. I.[1], Rudzko J. V.[2], Kolyachko V. V.[3]

[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus,
korzyuk@bsu.by

[2,3]Institute of Mathematics of the NAS of Belarus, Minsk, Belarus,
janycz@yahoo.com; vladislav.kolyachko@gmail.com

In the present report, we consider the following boundary-value problem

$$(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,l), \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x) - \begin{cases} 0, & x \in (0,l), \\ v, & x = l, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(t,\gamma(t)) = \mu_1(t), \quad (\partial_t^2 + b\partial_x)u(t,l) = \mu_2(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{3}$$

which models the longitudinal impact on a rod with a moving boundary $x = \gamma(t)$. We assume that $\gamma'(t) \in (-a,a)$, $t \in [0,\infty)$, and that the curves $x = \gamma(t)$ and $x = l$ do not intersect. The formulas (1) – (3) use the following notation: $a = \sqrt{E\rho^{-1}}$, $b = SEM^{-1}$, where $E > 0$ is Young's modulus of the rod material, $\rho > 0$ is the density of the rod material, $S > 0$ is the cross-sectional area of the rod, $M > 0$ is the mass of the impacting load, v is the velocity of the impacting load, μ_2 is the external force acting on the end of the rod, divided by the mass of the impacting load.

Definition 1. A function u is a classical solution of the problem (1) – (3) if it is representable in the form $u = u_1 + u_2$, where u_1 is a classical solution of the problem (1) – (3) with $v = 0$ and u_2 satisfies Eq. (1) with $f \equiv 0$, the initial conditions $u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0$, $x \in [0,l]$, the boundary conditions (3) with $\mu_1 = \mu_2 \equiv 0$, and the following matching conditions

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = \gamma_-(r_i) + at) = 0, \tag{4}$$

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = l + al_i - at) = 0, \quad i \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \tag{5}$$

$$[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x = l + al_i - at) = -v, \quad i \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \tag{6}$$

where $r_0 = l_0 = 0$, $l_i = r_{i-1} + a^{-1}(l - \gamma(r_i))$, $r_i = \Phi_+(l + al_{i-1})$, $\gamma_\pm(t) = \gamma(t) \pm at$, and Φ_+ is the inverse of γ_+.

The conditions (4) and (5) follow from the continuity, and the condition (6) is derived from the physical assumptions [1]. Note that Definition 1 gives a physically correct solution only under the additional condition $\gamma'(r_i) = 0$, $i \in \mathbb{N}$.

In this report, we formulate the conditions under which the classical solution of the problem (1) – (3) exists and is unique.

References

1. Korzyuk V.I., Rudzko J.V., Kolyachko V.V. Solutions of problems with discontinuous conditions for the wave equation // Ž. Beloruss. Gos. Univ., Mat. Inform. 2023. V. 3. P. 6–18.

GREEN'S FUNCTIONS OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR POLYHARMONIC OPERATORS AND THEIR CORRECT NARROWINGS

Bakytbek Koshanov[1], **Nazerke Oralbekova**[2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan, koshanov@math.kz;

[2]D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Uskemen, Kazakhstan aisu0409@mail.ru

Abstract: Finding general well-posed boundary value problems for differential equations is always a topical problem. The abstract theory of operator contractions and extensions originates from the work of J.von Neumann [1], in which a method for constructing self-adjoint extensions of a symmetric operator was described and a theory of extensions of symmetric operators with finite deficiency indices was developed in detail. Many problems for partial differential equations lead to operators with infinite deficiency indices.

In the early 80s of the last century, M. Otelbaev and his students [2] constructed an abstract theory that allows one to describe all well-posed restrictions of a maximal operator and, separately, all well-posed extensions of a minimal operator, in terms of the inverse operator.

Recently, interest in constructing explicit Green's functions for classical problems has been renewed. In the works of T.Sh.Kal'menov, B.D.Koshanov [3,4] the Green's function of the Dirichlet problem for a polyharmonic equation in a multidimensional ball is constructed in an explicit form.

This report will give a constructive method for constructing the Green's function of the Dirichlet problem for a polyharmonic equation in a multidimensional ball, where the method of special expansion of the fundamental solutions of the polyharmonic equation and the reflection method will be significantly used.

As an example, a general representation of real solutions of the biharmonic operator in complex form will be given.

2020 Mathematics Subject Classification: 31B30, 31B20, 31B10

This research has been/was/is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002 and AP 14869558).

References

1. Neumann J.von. Allgemeine eigenwerttheorie hermitescher funktional operatoren //Math. Ann. 1929. V. 102. P. 49–131.

2. Otelbaev M., Kokebaev B.K., Shynybekov A.N. On the expansion and restriction of operators //Doklady Akademi Nauk SSSR. 1983. V. 271, №6. P. 1307–1311.

3. Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D. Representation for the Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equations in a ball //Siberian Mathematical Journal. 2008. V. 49, №3. P. 423–428.

4. Koshanov B.D. Green's functions and correct restrictions of the polyharmonic operator //Bulletin of KazNU, A series of mathematics, mechanics, computer science. 2021. V. 109, №1, P. 34–54.

NUMERICAL SOLUTION OF KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH MOVING BOUNDARIES

Koshkarbayev N. M.

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
koshkarbayev@math.kz

Let
$$\widehat{\Omega} = \{(y,t) \in \mathbb{R}^2;\ \alpha(t) < y < \beta(t),\ 0 < t < T\}$$
represent the non-cylindrical domain with its lateral boundary indicated by
$$\widehat{E} = \bigcup_{0<t<T} \Gamma_t \times \{t\},$$
where $Q_t = \{y \in \mathbb{R};\ \alpha(t) < y < \beta(t),\ 0 < t < T\}$ and Γ_t denotes the boundary of Q_t. Consider the following nonlinear problem:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(y,t) + v(y,t)\dfrac{\partial v}{\partial y}(y,t) + \dfrac{\partial^3 v}{\partial y^3}(y,t) = 0,\ (y,t) \in Q_t, \\ v(\alpha(t),t) = v(\beta(t),t) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y}(\beta(t),t) = 0, \qquad t \in [0,T), \\ v(y,0) = v_0(y), \qquad y \in Q_0, \end{cases} \tag{1}$$
where prime denotes the time derivative and $Q_0 = [\alpha(0), \beta(0)]$.

In this paper, numerical solutions are presented for a mathematical model related to the Korteweg-de Vries equation in a domain with moving boundaries. Numerous numerical experiments are presented to illustrate the effectiveness and accuracy of the theoretical results.

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23483960).

References

1. D.J. Korteweg, G.de Vries, On the change of form of long waves advancing in rectangular canal and on a new type of long stationary waves, Philos. Mag. 36, (1895), 422-443.

2. G.G. Doronin, N.A. Larkin, KdV equation in domains with moving boundaries, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007) 503вЃЎ517.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR LAPLACE EQUATION IN THE STRIPE

Kudaybergenov A.K.
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan,
khudaybergenovallambergen@mail.ru

Consider the problem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{k(y)} \frac{\partial}{\partial y}\left[k(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < h, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

We consider this problem in the domain

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < h, \ x \in \mathbb{R}\}.$$

For a given $\sigma > 0$, we denote by the symbol A_σ the class of functions $f \in L_2(\mathbb{R})$, which analytically continues into the stripe

$$S_\sigma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\operatorname{Im} z| < \sigma\}, \tag{3}$$

moreover, the analytical continuation of $f(z)$ satisfies the condition

$$\|f\|_\sigma^2 = \sup_{|y|<\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 \, dx < +\infty. \tag{4}$$

The following theorems are true.

Theorem 1. *For any function $f \in A_\sigma$ the following inequalities*

$$\pi \|f\|_\sigma^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \cosh 2\sigma\xi \, d\xi \le 2\pi \|f\|_\sigma^2 \tag{5}$$

are valid.

Theorem 2. *Let the function ϕ belongs to class A_σ for $\sigma = h$. Then the solution of the equation (1)-(2) exists and is unique.*

Theorem 3. *Suppose that for a given function $\phi \in L_2(R)$ there is a solution to the equation (1)-(2). Then the function ϕ belongs to class A_σ for $\sigma = h$.*

References

1. A. N. Tikhonov, A. A. Samarsky, Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow (Russian), 1966.

2. J. Hadamard, Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New Haven: Yale University Press; London: Humphrey Milford; Oxford: University Press. VIII u. 316 S., 1923.

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN ODD-ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Kurbanov O. T.[1], **Kholboev B. M.**[2]
[1]Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan
odil69@inbox.ru
[2] Branch of Russian Economic University named after G. V. Plekhanov in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan.
bakhodir.kholboev@gmail.com

There is studied one nonlinear boundary value problem for an odd-order nonlinear equation with multiple characteristics in a curvilinear domain.

Problem. It is required to determine in domain $D = \{(x, y) : h_1(y) < x < h_2(y),\ 0 < y \le 1\}$ function $u(x, y)$ that has the following properties:

1) $u(x, y) \in C^{2n+1,1}_{x,y} \cap C^{2n,0}_{x,y}(\overline{D})$;

2) which is a regular solution to the following equation:

$$L(u) = \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} + (-1)^n \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u(x, y)), \tag{1}$$

in domain D;

3) satisfying the following conditions

$$u(x, 0) = u_0(x),\ \ h_1(0) \le x \le h_2(0), \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{\partial^{2n-j} u}{\partial x^{2n-j}}|_{x=h_2(y)} = g(u(h_2(y), y), y),\ \ 0 \le y \le 1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}|_{x=h_1(y)} = \varphi_i(y),\ \ 0 \le y \le 1,\ i = \overline{0, n}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j}|_{x=h_2(y)} = \psi_j(y),\ \ 0 \le y \le 1,\ j = \overline{1, n-1}, \tag{5}$$

and matching conditions

$$g(u(h_2(0), 0), 0) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{\partial^{2n-j} u_0(h_2(0))}{\partial x^{2n-j}},\ \ \varphi_i(0) = \frac{\partial^i u_0(h_1(0))}{\partial x^i},\ i = \overline{0, n},$$

$$\psi_j = \frac{\partial^j u_0(h_2(0))}{\partial x^j},\ \ j = \overline{1, n-1}.$$

The uniqueness of the solution to the boundary value problem was proven by the method of energy integrals using some elementary inequalities and the Friedrichs-type inequality.

ON AUTOMORPHISMS IN SIEGEL DOMAINS

Kuromboev Kh.N.[1], **Rakhmonov U.S.**[2]
[1]Chirchik State Pedagogical University, Uzbekistan
hamdambek2020@mail.ru;
[2]Toshkent State Technical University, Uzbekistan
uktam_rakhmonov@mail.ru

Let's consider a vector composed of ordered square matrices in the field of $m-$ Z_j, here may be vectors $Z = (Z_1, ..., Z_n)$. $Z_j \in \mathbb{C}$. $Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] \cong \mathbb{C}^{nm^2}$. Here, we can regard it as an element of the space. $Z, W \in \mathbb{C}^n [m \times m]$ The scalar product for matrices is defined as follows:

$$\langle Z, W\rangle = Z_1 W^* + ... + Z_n {W_n}^*,$$

Here W_j^* is addition and W_j . transposed matrix for a matrix,

Consider the second type of matrix sphere below:

This:

$$B^{(2)}_{m,n} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : I - \langle Z, Z\rangle > 0,\ Z^{'}_{\nu} = Z_{\nu}\ \nu = 1, 2, ..., n \right\}$$

the set is called a matrix sphere of the second type.

$$X^{(2)}_{m,n} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : \langle Z, Z\rangle = I,\ Z^{'}_{\nu} = Z_{\nu}\ \nu = 1, 2, ..., n \right\}$$

and the set is called the base of the matrix sphere of the second type.

Consider the following unbounded matrix Siegel domain of the second type:

$$D^{(2)}_{m,n} = \left\{ U \in \mathbb{C}^n [m \times m] : ImU_1 - \langle U, U\rangle^{'} > 0,\ U^{'}_{\nu} = U_{\nu}\ \nu = 1, 2, ..., n \right\},$$

the foundation of this field $\Gamma^2_{m,n}$ and it is defined as:

$$\Gamma^{(2)}_{m,n} = \left\{ U \in \mathbb{C}^n [m \times m] : ImU_1 - \langle U, U\rangle^{'} = 0,\ U^{'}_{\nu} = U_{\nu}\ \nu = 1, 2, ..., n \right\}.$$

If $n = 1$, in that case $D^2_{m,n}$ the field overlaps with the first-type matrix Siegel domain.

Lemma. *$U = \Phi(Z)$ reflection, here is:*

$$U_1 = i(I - Z_1)^{-1}(I + Z_1)$$
$$U_k = (I - Z_1)^{-1} Z_k, \qquad k = 2, ..., n,$$

$B^2_{m,n}$ field, reflects a bigolomorph to a sphere $D^2_{m,n}$, $X^2_{m,n}$ and ostov using this reflection, goes to the ostov $\Gamma^2_{m,n}$.

If there is an automorphism $\forall\ A \in B^2_{m,n}$ that transfers a point to any other point, then the group of automorphisms is called transitive.

References

1. T.Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris: Gauthier-Villars (1 926) , pp . 3–6.

2. Eisenberg L.A. Carleman formula and complex analysis. Novosibirsk: Nauka, 1990. -248 p.

3. Hua Lo-ken. Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains. - M.: IL, 1959. - 163 p.

INVERSE COEFFICIENT PROBLEMS FOR A SECOND ORDER DEGENERATE PARABOLIC EQUATION

Mamanazarov A. O.[1], **Mahmudjonova Sh. B.**[2]
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan,
[1]mamanazarovaz1992@gmail.com; [2]shohsanamatamjonova@gmail.com

Let Ω be a rectangular domain of the plane xOt such that

$$\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\},$$

where l, T are positive real numbers. In the domain Ω we consider the following equation

$$u_t = (x^\alpha u_x)_x + p(t)u(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $0 < \alpha < 1$, $f(x,t)$ is a given function and $u(x,t)$, $p(t)$ are unknown functions.

The paper aims to recover the time-dependent coefficient of equation (1) with two types of over-determination conditions. Namely, we considered the following problems:

Problem 1. Show the existence and uniqueness of a pair of functions $\{u(x,t), p(t)\}$ satisfying equation (1) in the domain Ω, and the following initial-boundary conditions

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1], \quad u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T] \tag{2}$$

and the following over-determination condition

$$u(\xi,t) = \omega(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

where $\varphi(x)$, $\omega(t)$ are given functions such that $\varphi(\xi) = \omega(0)$, ξ is a given fixed real number from the interval $(0,l)$.

Moreover, in the domain Ω we consider the following equation

$$u_t = (x^\alpha u_x)_x + r(t)f(x,t) \tag{4}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $0 < \alpha < 1$, $f(x,t)$ is given function and $u(x,t)$, $r(t)$ are unknown functions.

For equation (4), we studied the following

Problem 2. Show the existence and uniqueness of a pair of functions $u(x,t), r(t)$ satisfying equation (4) in the domain Ω and the conditions (2), and the following non-local overdetermination condition:

$$\int_0^1 \omega(x)u(x,t)dx = w(t), \quad t \in [0,T],$$

where $\omega(x)$ and $w(t)$ are given functions such that $\int_0^1 \omega(x)\varphi(x)dx = w(0)$.

We proved the existence and uniqueness of the solution to the considered problems by applying Fourier's method of separation variables.

KARLEMAN'S FORMULA IN MATRIX ZIEGEL DOMAINS

Matkarimova Z.I.[1]

[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan; zaynabibragimovna@gmail.com

We have the second type of classic domain: $\Re_{II} = \left\{ Z = \mathbb{C}\left[m \times m\right] : I - Z\overline{Z} > 0 \right\}$, and its ostov: $S_{II} = \left\{ Z = \mathbb{C}\left[m \times m\right] : Z\overline{Z} = I \right\}$ and was a part of it $M \subset S_{II}$ in the set $\mu(M) > 0$ measure is given. (where $\mu - S_{II}$ is a normalized Lebesgue measure on) [1-2]

S_{II} we perform the following parameterization in ostov: $U = e^{i\phi}u$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $u \in SU(m)$. Where $SU(m)-$ group of special unitary matrices, i.e $detU = 1$.

If $\det U = e^{im\phi} \det u = e^{im\phi}$, in that case $\{U : U = \lambda u, |\lambda| = 1\}, u \in SU(m)$ set $SU(m)-$ overlaps with elements of the group at point m.

The matrix Ziegel domain of the first type is defined in the following form: $D_{II} = \{W \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] : \operatorname{Im} W > 0\}$. Where $W = \|w_{jk}\|, (j,k = 1, ..., m)-$ is a symmetric matrix-function whose elements $\mathbb{C}$ belong to the complex plane. Boundary of domain ∂D_{II} belonged to $\Gamma_{II} = \{W \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] : \operatorname{Im} W = 0\}$ set D_{II} is called the ostov of the domain (Shilov boundary).

Lemma. The following

$$W = \Phi(Z) = i(I + Z)(I - Z)^{-1} \tag{1}$$

the Keli transformation is a bigholomorphic reflection of the domain $\Re_{II}$ into the domain D_{II}, and with this reflection, the set S_{II} goes into the set Γ_{II}.

We denote by $O(D_{II})$ the class of holomorphic functions in the domain D_{II}.

If $f \in O(D_{II})$, then $f(i(I+Z)(I - Z)^{-1}) \in H^1(\Re_{II})$ for the attitude to be appropriate

$$\frac{f(W)}{\det^2(W + iI)} \in H^1(D_I) \tag{2}$$

the condition must be met.

Theorema. If the function $f \in O(D_{II})$ (2) satisfies the condition and the set has positive Lebesgue measure $\widetilde{M} \subset \Gamma_{II}$, then

$$f(W) = \frac{\det^{\frac{m+1}{2}})(W + iI)}{i^{\left(\frac{m+1}{2}\right)^2}} \lim_{j \to \infty} \int\limits_{\widetilde{M}} f(V) \left[\frac{\widetilde{\varphi}(V)}{\widetilde{\varphi}(W)}\right]^j \frac{d\mu_V}{\det^{\frac{m+1}{2}}(\overline{V} - W)\det^{\frac{m+1}{2}}(V + iI)} \tag{3}$$

in the compact of the ostov has a flat converging limit Karleman's formula is appropriate, where $V \in \widetilde{M}$.

References

1. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск, Н:,1990 г, 248с.

2. Hua Luogeng, Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains, AMS, 1963.

3. Кытманов А.М, Никитина Т.Н. Анологи формулы Карлемана для классических областей. Мат.заметки 1989 г. 153 с.

THE PROBLEM OF MODELING THE REQUIREMENTS OF CUSTOMS LEGISLATION

Mukhtorov I. M.[1], Abdurakhmanov T. T.[2]
[1]Customs Committee of the Republic of Uzbekistan,
Mukhtorov1974@mail.ru;
[2]Mathematical Institute named after V.I. Romanovsky,
abdutohir@gmail.ru

Declaring the customs value of foreign trade goods by artificially understating it is one of the most well-known and widespread customs violations. On this issue, Article 302 of the Customs Code of the Republic of Uzbekistan specifies 6 methods for determining the customs value of goods, in which the use of each subsequent method is permitted if the previous one cannot be used to determine the customs value. To control compliance with customs legislation, it will be necessary to create algorithms that check whether the events listed in Table 1 are "true"or "false".

Contents of the legal requirement	**requirements of customs legislation**	**Logical value of legal requirements**
a declaration for customs clearance of imported goods has been submitted	Must be fulfilled	true
the main method for determining the customs value of imported goods is applicable	Must not be fulfilled	false
2- the method of determining the customs value of imported goods is applicable	Must not be fulfilled	false
3- the method of determining the customs value of imported goods is applicable	Must not be fulfilled	false
4- the method of determining the customs value of imported goods is applicable	Must not be fulfilled	false
5- the method of determining the customs value of imported goods is applicable	Must not be fulfilled	false
6- the method of determining the customs value of imported goods is applicable	Must be fulfilled	true

From this it is clear that the issue of monitoring compliance with legal requirements is directly a question of mathematical logic. If each of the "contents of the requirements of legislation" in Table 1 is designated as $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ respectively, then we will obtain a logical model of control over the fulfillment of the requirements of Article 302 of the Customs Code of the Republic of Uzbekistan.

$$A = A_1 \& \rceil A_2 \& \rceil A_3 \& \rceil A_4 \& \rceil A_5 \& \rceil A_6 \& A_7$$

Using this model (1), one can easily check whether opinion A is true or false. The requirements of Article 302 of the Customs Code will be met only if it is "true". In conclusion, it should be noted that the logical support for monitoring the requirements of customs legislation, developed within the framework of this study, was implemented in practice and demonstrated its effectiveness. In particular, to date, more than 50 logical control profiles have been put into practice, and as a result of their application, state budget arrears in the amount of 462.1 billion soums were prevented in 2022.

INVESTIGATION OF THE NONLINEAR INTEGRABLE EQUATIONS

Myrzakul A. R.

Astana IT University, Astana, Kazakhstan,
a.myrzakul@astanait.edu.kz

Nowadays, modern derivative equations are extended in the theory of the nonlinear integrable equations. In this work, we will demonstrate some of them and connection between them.

References

1. Lakshmanan M. On the geometrical interpretation of solitons //Phys. Lett. 1978. Vol.64, №4. P.354–356.

2. Zakharov V.E., Takhtajan L.A. Equivalence of the nonlinear Schrödinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet //Theor. Math. Phys. 1979. Vol.38. P.17-23.

3. Gadzhimuradov T.A., Agalarov A.M. Towards a gauge-equivalent magnetic structure of the nonlocal nonlinear Schrödinger equation //Phys. Rev. A. 2016. Vol.93. P. 062124.

DYNAMIC FREE BOUNDARIES IN PREY-PREDATOR MODELS WITH NONLINEAR PREY-TAXIS

Norov A. Q.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics. Tashkent, Uzbekistan,
norov9770@gmail.com;

This thesis is focused on the mathematical formulation and analysis of free boundary problems in prey-predator models incorporating nonlinear prey-taxis. The work delves into how the introduction of prey-taxis influences the dynamics of predator population movement and the subsequent effects on the ecosystem. Key contributions include the establishment of existence, uniqueness, and stability criteria for the solutions, as well as insights into the qualitative behavior of these systems.

Prey-predator models have a long-standing history in ecological studies, offering insights into the complex dynamics between interacting species. Traditional models rely on differential equations to describe the change in populations over time. However, these models often assume homogeneity in space and do not account for the directed movement of predators towards prey, known as prey-taxis. This thesis addresses this gap by introducing nonlinear prey-taxis into prey-predator models with free boundary problems.

This note considers the Beddington-DeAngelis diffusion predator-prey model with a nonlinear prey taxis and a free boundary: It is required to find functions $h\,(t)$,$u\,(t,x)$, $v\,(t,x)$ in the domain $D=\{(t,x):0<t\leq T,0<x<h\,(t)\}$ satisfying the conditions

$$
\begin{gathered}
u_t-u_{xx}+(u\chi(u)v_x)_x=f(u,v),\quad t>0,0<x<h(t),\\
v_t-dv_{xx}-kv_x=g(u,v),\qquad t>0,0<x<h(t),\\
u_x(t,0)=v_x(t,0)=u(t,h(t))=v(t,h(t))=0,\quad t\geq 0,\\
\dot{h}(t)=-\rho u_x(t,h(t))-\mu v_x(t,h(t)),\quad t\geq 0,\\
u(0,x)=u_0(x),\quad v(0,x)=v_0(x),\quad 0\leq x\leq h_0=h(0),\\
f(u,v)=buv/(c+u+mv)-au,\quad g(u,v)=v(q-v)-ruv/(c+u+mv),
\end{gathered}
$$

where $x=s\,(t)$ is a free boundary, u and v represent prey and predator densities, respectively. Constants $a,b,c,m,q,k,r,\ \ d$ are positive; a is the mortality rate of the predator, which does not depend on the prey density; the function $\frac{rv}{c+u+mv}$ is the Beddington-DeAngelis functional response; and $\frac{b}{r}$ is the conversion rate from prey to predator.

The main result of the work is the establishment of the global existence of a classical solution to the problem and the study of the behavior of the solution. A method is proposed for establishing a priori estimates of the Schauder type for a new class of problems with a free boundary for mixed-two-phase cross-diffusion systems. Certain sufficient conditions are also established for both reproduction and extinction.

GEOMETRY OF INTEGRABLE NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN 1+1 DIMENSIONS

Nugmanova G. N.[1], **Azhikhan A.**[2]
Eurasian National University, Astana, Kazakhstan,
[1]nugmanovagn@gmail.com, [2]aidana.azhikhan@gmail.com

In this research, we present a geometric formulation of the two-component modified Camassa-Holm equation (2-mCHE)

$$q_t + [(u^2 - u_x^2)q]_x = 0,$$
$$q - u + u_{xx} = 0.$$

All of the Camassa-Holm type equations possess infinite number conservation laws, bi-Hamiltonian structures, Lax representations, peakon solutions and other fundamental attributes of integrable nonlinear differential equations.

We also study the relation between the 2-mCHE and the generalized Heisenberg equation (GHE)

$$[A, A_{xt}] + (Q[A, A_x])_x + \frac{8}{\beta^2}A_x = 0,$$

where $\beta = const$ and

$$A = \begin{pmatrix} A_3 & A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix}, \quad A^{\pm} = A_1 \pm iA_2, \quad A^2 = I.$$

The Lax pair of the GHE reads as

$$\Psi_x = U_1\Psi,$$
$$\Psi_s = V_1\Psi,$$

where

$$U_1 = \left(\frac{\lambda}{4\beta} - \frac{1}{4}\right)[A, A_x],$$

$$V_1 = \left(\frac{1}{4\beta^2} - \frac{1}{4\lambda^2}\right)A + \left[\frac{1}{8\beta\lambda} - \frac{1}{8\beta^2} - \left(\frac{\lambda}{4\beta} - \frac{1}{4}\right)u\right][A, A_x] +$$
$$+ \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\beta}\right)[A, \frac{\beta}{2}A_t + \left(\frac{\beta u}{2} - \frac{1}{4\beta}\right)A_x].$$

We show that the above equations arise from the flows of invariant space curves in three-dimensional Euclidean geometry. Using this approach, the geometric relation between the 2-mCHE and the GHE is established.

References

1. Myrzakul A., Nugmanova G., Serikbayev N., Myrzakulov R. Surfaces and curves induced by nonlinear Schrodinger-type equations and their spin systems // Symmetry, 2021, 13(10), P. 1827 (18 pages).

2. Tayshieva A.G., Nugmanova G.N., Myrzakul T.R. On equivalence of one spin system and two-component Camassa-Holm equation // Ufa Mathematical Journal, 2020, 12(2), P. 50-55.

OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS WITH DERIVATIVE IN THE SPACES $L_2^{(3)}(0,1)$ AND $L_2^{(4)}(0,1)$

Nuraliev F. A.[1,2], Kuziev Sh. S.[2]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan,
f.nuraliev79@mail.ru;
[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
shaxobiddin.qoziyev.89@gmail.com

Currently, there are various approaches to constructing quadrature formulas. One of them is the classical approach to constructing quadrature formulas, which requires the accuracy of the polynomial formula for the highest possible order. Another of them is the functional approach to constructing quadrature formulas. In this case, the quadrature formula is designed to minimize the error functional norm in a given Banach space. we discuss the construction of derivative optimal quadrature formulas in the Sobolev space. We derive an analytical expression for an error functional norm and obtain a system of linear equations Winner-Hopf type by the coefficients using the method of Lagrange multipliers. We apply the Sobolev method to get the analytical representation of the optimal coefficients for cases $m = 3$ and $m = 4$ in $L_2^{(m)}(0,1)$ space.

We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_0\,[\beta]\varphi[\beta] + \frac{h^2}{12}(\varphi'(0) - \varphi'(1)) + \sum_{\beta=0}^{N} C_1\,[\beta]\varphi''[\beta] \tag{1}$$

with error functional

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_0\,[\beta]\delta\,(x-[\beta]) + \frac{h^2}{12}(\delta'(x) - \delta'(x-1)) - \sum_{\beta=0}^{N} C_1\,[\beta]\delta''\,(x-[\beta]) \tag{2}$$

here $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is characteristic function of $[0,1]$, $\delta(x)$ is Dirac's delta function, $[\beta] = h\beta$.

Theorem. Among quadrature formulas of the form (1) with the error functional (2) in the space $L_2^{(4)}(0,1)$ there exists unique optimal formula which coefficients are determined by the following formulas

$$C_1[\beta] = ah\frac{q-q^N}{q-1}, \qquad \beta = 0, N,$$

$$C_1[\beta] = ah\left(q^\beta + q^{N-\beta}\right), \qquad \beta = \overline{1, N-1}$$

where $a = \frac{h^2}{120(1+q^N)}$, $q = \sqrt{3} - 2$.

References

1. Sobolev S.L. Introduction to the Theory of Cubature Formulas, Nauka, Moscow, 1974. (in Russian).

2. Shadimetov, Kh.M., Hayotov, A.R., Nuraliev, F.A. On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2013, №243, pp. 91-112.

ON DYNAMICS OF A NON-VOLTERRA QUADRATIC STOCHASTIC OPERATOR

Rajabov S. M.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
rajabovs90@mail.ru

Let $E_m = \{1, \ldots, m\}$ be a finite set and the set of all probability distributions on E_m

$$S^{m-1} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \ x_i \geq 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\},$$

the $(m-1)$-dimensional simplex.

A *quadratic stochastic operator* (1) is a mapping $V\colon S^{m-1} \to S^{m-1}$ of the simplex into itself, of the form $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \in S^{m-1}$, where

$$V : x'_k = \sum_{i,j \in E_m} p_{ij,k} x_i x_j, \quad \forall\, k \in E_m, \tag{1}$$

and the coefficients $p_{ij,k}$ satisfy $p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0, \quad \sum\limits_{k \in E_m}^{m} p_{ij,k} = 1, \quad \text{for all} \quad i, j, k \in E_m.$

For any point $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ the trajectory $\left\{V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\right\}_{n \geq 0}$ is defined by $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)})$ for all $n = 0, 1, 2, \ldots$ We denote by $\omega_V\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ the set of ω- limiting points of the trajectory $\left\{V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\right\}_{n \geq 0}$. A main problem in mathematical biology is the description of the set $\omega_V\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ for a given QSO. This problem deeply studied in [1] for Volterra QSOs.

In the present paper we consider a non-Volterra quadratic stochastic operator which depend of parameter $\theta \in [0, 1]$. Namely we consider the following quadratic stochastic operator defined on the S^2

$$V : \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = (1-\theta)x_1^2 + \theta x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3, \\ x'_2 = (1-\theta)x_2^2 + \theta x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3, \\ x'_3 = (1-\theta)x_3^2 + \theta x_1^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \end{array} \right. \tag{2}$$

where $0 \leq \theta \leq 1$. Note that the operator (2) is a non-Volterra QSO.

Let $\mathbf{c} = (1/3, 1/3, 1/3)$ be the center of the simplex S^2.

Theorem. For the non-Volterra QSO (2) the following assertions are true:

(i) If $\theta = 0$ then the operator V is identity map;

(ii) If $0 < \theta < 1$ then $\lim\limits_{n \to \infty} V^n(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ for any $\mathbf{x} \in S^2$;

(iii) If $\theta = 1$ then for any $\mathbf{x} \in S^2 \setminus \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{c}\}$ we have $\lim\limits_{n \to \infty} V^n(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$.

References

1. Ganikhodzhaev R. N., Quadratic stochastic operators. Lyapunov functions and tournaments. Sb. Math. 76 (2) (1993), pp. 489 - 506.

FREE BOUNDARY PROBLEM FOR A DIFFUSIVE LOGISTIC EQUATION

Rasulov M. S.[1], Norov A. Q.[1]
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics[1], Tashkent, Uzbekistan,
rasulovms@bk.ru, norov9770@gmail.com;

In this work, we study free boundary problem for a diffusive logistic equation:

$$k(u)u_t - du_{xx} - mu_x = u(a - bu), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < s\,(t)\,, \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad 0 \le x \le s_0 = s\,(0)\,, \tag{2}$$

$$u(t, 0) = \sigma, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$s'(t) = -\mu u_x(t, s(t)) - \alpha, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

where σ, μ, d, m, a, b, α are given positive constants. $s\,(t)$ is a moving boundary to be determined together with $u(t, x)$. $k\,(u) \ge k_0 > 0$ and the initial function $u_0(x)$ satisfy

$$u_0\,(x) \in C^2\,([0, s_0])\,, \quad 0 < u_0\,(x) \le \frac{a}{b} \;\text{ in }\; (0, s_0)\,, u_0\,(0) = \sigma, \;\; u_0\,(s_0) = 0, \;\; u_0'\,(s_0) < 0.$$

Problem (1)-(5) arises in the modeling of the propagation of a new or invasive species, with the free boundaries representing the propagation fronts. $u(t, x)$ is the density of the species, the moving interval $[0, s(t)]$ is the region occupied by the invasive species. Moreover, the environment at the boundary also affects the spreading of the species, if the environment is against spreading, this will result in spreading resistant force at the boundary, we use $\alpha > 0$ to denote the decay rate at such boundary.

Such problem was investigated in [1], when $k(u) = 1$, $\alpha = m = 0$ and $u(t, 0) = \sigma$ is replaced by $u_x(t, 0) = 0$. In this case a spreading-vanishing dichotomy was established, namely the species either successfully spreads to all the new environment and stabilizes at a positive equilibrium state, or fails to establish and dies out in the long run; moreover, in the case of spreading, the asymptotic spreading speed was determined. In [2] above results improved, authors considered the free boundary problem of a diffusive logistic equation with nonlinear term.

In this work, a priori estimates of the Schauder type are established. Based on the established estimates, the behavior of the free boundary is studied. The uniqueness theorem and the existence of a solution to problem (1)-(5) are proved. Some qualitative properties of the solution for $t \to +\infty$ are also investigated.

References

1. Y.Du, Z.Lin. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2010. V.42, №1. P. 377–405.
2. R.Wang, L.Wang and Zh, Wang. Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term // J. Math.Anal.Appl. 2018. V.467, №2, P. 1233–1257.

ABOUT ONE INVERSE PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION IN A LIMITED DOMAIN

Safarov J. Sh.[1,2]**, Abdullayeva F. S.**[1]
[1]Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan,
j.safarov65@mail.ru;
[2]Institute of Mathematics, AS of the Republic of Uzbekistan,Tashkent, Uzbekistan,
aferuza1101@gmail.com

Inverse problems for integro-differential equations arise in many areas of applied research, such as electrodynamics, acoustics, quantum scattering theory, geophysics, astronomy, etc. The presence of an integral term in the equation is associated with the need to take into account the dependence of the instantaneous values of the characteristics of the described object on their respective previous values, that is, the impact of the prehistory on the current state of the system. Mathematically, integrals of the convolution type are added to the right-hand sides of the corresponding equations, which describe the delay phenomenon. The theory of inverse problems for integro-differential equations of hyperbolic type is a rapidly developing and relatively new area of modern mathematical physics. Methods for solving inverse problems for second-order partial differential equations of various types can be found and there is an extensive bibliography in these publications.

Consider the following integro-differential equation:

$$w_{tt} - Lw = \int_0^t k(t-\theta)Lw(x,\theta)\,d\theta, \quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

with initial

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad w_t|_{t=0} = \eta(x), \quad x\in\overline{\Omega}, \tag{2}$$

and boundary conditions:

$$w(x,t) = 0, \qquad (x,t)\in\partial Q. \tag{3}$$

where $L = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - c(x)$ is the uniformly elliptic operator ($n \geq 1$), the coefficients satisfy the conditions $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $c(x) \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$. $Q := \Omega \times (0,T]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, and $\partial Q := \partial\Omega \times [0,T]$, $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are given functions. Finding function $u(x,t)$ from (1)–(3), with known $k(t)$, we call the direct problem.

The inverse problem consists in determining the unknown coefficient $k(t)$, $t > 0$, from the available additional data on the solution to the direct problem at some point $x_0 \in \Omega$,

$$\left[w(x,t) + \int_0^t k(t-\theta)w(x,\theta)\,d\theta\right]\Bigg|_{x=x_0} = \hbar(t), \qquad 0\leq t\leq T,$$

where $h(t)$ is the given function.

Theorems of existence and uniqueness of both the direct and inverse problems have been proven.

ON SOLVABILITY OF THE NON-LOCAL PROBLEM FOR THE FRACTIONAL TELEGRAPH EQUATION WITH CAPUTO OPERATOR

Saparbayev R. A.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
rajapboy1202@gmail.com

Assume that H is a separable Hilbert space and that the scalar product $(\cdot,\cdot)$ and the norm $||\cdot||$ are defined in it. Consider the operator A satisfying the following conditions $(Ah,h)\geq C(h,h), \quad h\in D(A), \quad C>0,\ A=A^*$. Here $D(A)$ is the definition domain of operator A (given below) and A^* is the adjoint of operator A. Let A be an operator with complete orthonormal eigenfunctions v_k in H and countable and ordered eigenvalues $\lambda_k: 0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots, \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=\infty$.

Let $\rho\in(0,1)$ be a fixed number. Consider the following non-local boundary value problem

$$\begin{cases} (D_t^\rho)^2u(t)+2\alpha D_t^\rho u(t)+Au(t)=f(t), \quad 0<t\leq T;\\ D_t^\rho u(t)|_{t=T}=\beta\lim\limits_{t\to 0}D_t^\rho u(t)+\varphi_1,\\ u(T)=\beta u(0)+\varphi_2, \end{cases} \tag{1}$$

where $f(t)$, φ_1 and φ_2 are know elements of H. α, β are known arbitrary real numbers, D_t^ρ is the Caputo fractional differentiation operator of order $\rho\in(0,1)$.

One of the first works studying the fractional-time telegraph equation is the fundamental paper by R. Cascaval et al.[1]. In the paper [2] this equation with the right-hand side $f(t)$ is considered and conditions for the initial functions and the right-hand side of the equation are found that guarantee both the existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem. It should be emphasized that these conditions turned out to be less restrictive than was assumed in the paper by R. Cascaval et al. [1], where some restrictions on the spectrum of the operator A were also assumed. Work [3] is a continuation of the article [2], where the authors investigated the inverse problem of determining the right-hand side $f(t)$ of the equation.

In the present paper we prove the existence and uniqueness theorems for solution of problem (1). Next, we will study the dependence of the existence of a solution on the value of the parameter β. We will also prove, in contrast to the backward problem, that the solution of problem (1) continuously depend on the right-hand side of the equation and on the functions φ_1, φ_2 and $f(t)$.

References

1. Cascaval.R. Eckstein.E. Frota.C. Goldstein.A. Fractional telegraph equations.// J. Math. Anal. Appl. 2002. 276(1), 145-159.

2. Ashurov.R. Saparbayev.R. Fractional telegraph equation with the Caputo derivative.// Fractal Fract. 2023. 7(6), 1-17.

3. Ashurov.R. Saparbayev.R. Time-dependent identification problem for a fractional Telegraph equation with the Caputo derivative.// Fractional Calculus and Applied Analysis. 2024. 27, 652–676.

COEFFICIENTS OF THE IMPLICIT OPTIMAL DIFFERENCE FORMULAS

Shadimetov Kh. M.[1,2], **Shonazarov S. K.**[2]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan,
kholmatshadimetov@mail.ru;
[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
sshon1989.08.01@gmail.com

In this paper we consider the following general difference formula [1,2]

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h^2 \sum_{\beta=0}^{k} C^{(\|)}[\beta]\varphi''[\beta] \cong 0, \tag{1}$$

here $h = \frac{1}{N}$, $[\beta] = h\beta$, $(\beta = 0, 1, \ldots, k)$, $C[\beta]$ and $C^{(\|)}[\beta]$ are unknown coefficients of the difference formula. We consider a function $\varphi(x)$ obtained from Sobolev's $L_2^{(3)}(0,\, 1)$ space.

The error functional corresponding to the error of (**??**) is:

$$\ell(x) = \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\delta(x - h\beta) - h^2 \sum_{\beta=0}^{k} C^{(\|)}[\beta]\delta''(x - h\beta), \tag{2}$$

where $\delta(x)$ is Dirac's delta-function.

By the Cauchy-Schwarz inequality the absolute value of the error (2) is estimated as follows

$$|(\ell,\, \varphi)| \leq \left\| \ell \left| L_2^{(3)*}(0,1) \right\| \cdot \right\| \varphi \left| L_2^{(3)}(0,1) \right\| ,$$

where $\|\ell | L_2^{(3)*}(0,1)\| = \sup\limits_{\varphi,\, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell,\varphi)|}{\|\varphi\|_{L_2^{(3)}(0,1)}}$.

We construct the implicit optimal difference formula of the form (**??**) in the space $L_2^{(3)}(0,1)$ and we find implicit formulas for optimal coefficients $\overset{\circ}{C}{}^{(\|)}[\beta]$ satisfying the following equality

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \left| L_2^{(3)*}(0,1) \right\| = \inf_{C^{(\|)}[\beta]} \right\| \ell \left| L_2^{(3)*}(0,1) \right\| .$$

The following is true

Theorem. *In the Sobolev space $L_2^{(3)}(0,1)$, there exists a unique implicit optimal difference formula of the Stormer type, whose coefficients are as follows:*

$$\overset{\circ}{C}{}^{(\|)}[\beta] = \begin{cases} 0, \ at \ \ \beta = \overline{0, k-3}, \\ 1/6, \ at \ \beta = k-2, \\ 2/3, \ at \ \beta = k-1, \\ 1/6, \ at \ \beta = k. \end{cases}$$

References

1. Babuška I., Vitasek E., Prager M. Numerical processes for solution of differential equations. Moscow.: Mir, 1969, 369 p.

2. Shadimetov Kh.M. Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces. Monograph. Tashkent.: Fan va texnologiya, 2019.

DECAY ESTIMATES OF SOLUTIONS OF CAUCHY-DIRICHLET PROBLEM FOR THE TIME-FRACTIONAL DIFFUSION EQUATIONS

Smadiyeva A. G.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
smadiyeva@math.kz

We consider the following Cauchy-Dirichlet problem

$$\partial^{\alpha}_{0+,t}u(t,x) - a(t)\mathcal{A}(u(t,x)) = 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega := \Omega_+, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(t,x) = 0,\ \ t \geq 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

where $0 < \alpha \leq 1$, $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $\partial^{\alpha}_{0+,t}$ is the Caputo fractional derivative [1, P. 97].

Acknowledgements

This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19175678).

References

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations// Elsevier. North-Holland. Mathematics studies. 2006.

INVERSE SOURCE PROBLEM FOR THE SUBDIFFUSION EQUATION ON A METRIC STAR GRAPH

Sobirov Z. A.[1,2], **Turemuratova A. A.**[2]
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
z.sobirov@nuu.uz; ariuxanturemuratova@gmail.com

We study the subdiffusion equation on each edge of the graph Γ

$$\partial_{0,t}^{\alpha_i} u_i(x,t) - u_{i,xx}(x,t) = f(t) g_i(x,t),\ x \in e_i,\ \ t \in (0,T],\ i = \overline{1,n},$$

where $\partial_{0,t}^{\alpha_i}$ denotes the generalized Caputo fractional derivative [1] of order $\alpha_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$, $g_i(x,t), i = \overline{1,n}$, are given functions, $f(t)$ is unknown function. We have to solve this equation in a bonded domain $G_T = \Gamma \times (0,T]$ satisfying the initial conditions

$$u_i(x,0) = 0, \quad x \in \bar{e}_i, \quad i = \overline{1,n},$$

the vertex conditions

$$\sum_{i=1}^{n} u_{i,x}(0,t) = 0,\ I_{0,t}^{1-\alpha_i} u_i(0,t) = I_{0,t}^{1-\alpha_j} u_j(0,t),\ i \neq j,\ i,j = \overline{1,n},\ t \in (0,T],$$

and the boundary conditions $u_i(l_i,t) = 0,\ t \in (0,T]$. We introduce an additional integral overdetermination condition in the form of

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{l_i} \eta_i(x) I_{0,t}^{1-\alpha_i} u_i(x,t) dx = \psi(t), \quad t \in (0,T],$$

where $\eta_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, and $\psi(t)$ are known functions.

In a study by Mehandiratta et al. [2], the researchers investigated the existence and uniqueness of the weak solution of the time-fractional diffusion equation on a metric star graph. This equation involved the same fractional orders of derivatives in each of the edges.

The current work is centered on the inverse source problem for the subdiffusion equation on a metric star graph. The approach to solving this problem involves the method introduced by Ladyzhenskaya [3]. This method includes reducing the given problem to an operator equation and using a-priory estimates. We showed that the resolvent operator is appropriately defined in the inverse source problem, as evidenced by the overdetermination condition.

References

1. Kubica A., Ryszewska K., Yamamoto M. Time-Fractional Differential Equations: A Theoretical Introduction. Springer, Singapore. 2020.

2. Mehandiratta V., Mehra M., Leugering G. Existence and uniqueness of time-fractional diffusion equation on a metric star graph // Computational Sciences - Modelling, Computing and Soft Computing, 2020.

3. Ladyzhenskaya O.A. Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki. Moscow.: Nauka, 1973.

INVESTIGATION THE CAUCHY PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL TIME-FRACTIONAL WAVE EQUATION

Subhonova Z.A.
V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan
subhonovaziyoda5@gmail.com.

We consider the the time-fractional diffusion-wave equation with convolution integral

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}u\right)(x,t) - u_{xx}(x,t) = \int_0^t k(\tau)u(x,t-\tau)d\tau + f(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \tag{1}$$

the solution of which satisfies the initial conditions

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

where $1 < \alpha < 2$, ${}^{C}\mathcal{D}_t^{(\alpha)}-$ Caputo fractional derivative , that is

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u\right)(x,t) := (I_t^{2-\alpha})u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t \frac{u_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}d\tau$$

is defined by the formula, $D_T := \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, 0 < t \le T\}$. In (1) and (2) $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ are given smooth functions. $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$. In (1) and (2) $\varphi(x)$, $\psi(x)$ are given smooth functions.

Solution to problem (1)-(2)

$$u(x,t) = \int\limits_R Z_1(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_R Z_2(x-\xi,t)\psi(\xi)d\xi$$

$$+\int_0^t \int\limits_R Y(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad t \in (0,t), \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

where

$$Z_j(x,t) = \frac{t^{j-1}}{(\pi)^{\frac{1}{2}}|x|}H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^2}{4t^\alpha}\Big|_{(\frac{1}{2},1),(1,1)}^{(j,\alpha)}\right], \quad j = 1,2,$$

$$Y(x,t) = \frac{1}{(\pi)^{\frac{1}{2}}|x|}t^{\alpha-1}H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^2}{4t^\alpha}\Big|_{(\frac{1}{2},1),(1,1)}^{(\alpha,\alpha)}\right]. \tag{4}$$

Lemma. *If $k(t) \in C[0,T], f(x,t) \in C_b(\bar{D}_T), \varphi(x) \in C_b(\mathbb{R}), \psi(x) \in C_b(\mathbb{R})$, then there exists a unique solution of the problem (1)-(2) such that $u(x,t) \in C^{2,\alpha}(D_T)$.*

References

1.Kilbas. A. A., Srivastava. H. M., and Trujillo. J. J. Theory and Application of Fractional Differential Equations, *North-Holland Mathematical Studie*, (2006).

2. Subhonova Z.A., Rahmonov A.A. Problem of Determining the Time Dependent Coefficient in the Fractional Diffusion-Wave Equation, *Lobachevskii J. Math*, (2021).

ON THE INTEGRATION OF MATHEMATICAL MODELS WITH EXPERIMENTAL DATA IN THE DYNAMICS OF VIRAL INFECTION

Takhirov J. O.
Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
prof.takhirov@yahoo.com

Mathematical biology has both theoretical and practical applications in biological, biomedical, and biotechnological research. A quantitative description of any system means that its behavior can be better modeled and, therefore, properties that may not be obvious to experiment can be predicted. This requires accurate mathematical models.

It is well known that applications in the physical sciences have been a driving force in the development of the mathematical sciences. The same is beginning to happen in the biological sciences. New scientific directions inspired by biology are beginning to emerge in a number of different areas of mathematics.

Models in mathematical biology aim to explain biological processes and then serve as a tool to advance new research in biology. When the predictions of a mathematical model are consistent with experimental data, the model can be used to conduct in silico experiments and generate new hypotheses. Despite progress in the development of antimicrobials and vaccines, knowledge of the effects of therapeutics on host-bacteria interactions remains incomplete. Understanding the characteristics of bacterial colonization and migration between tissues and the relationship between replication and host-induced or therapeutic killing may enable the effective design of therapeutic approaches.

We can argue that mathematical modeling, as a complement to experimental data, can enrich the biological understanding that these data provide.

From first principles, therapeutic interventions should aim to reduce or eliminate pathogenic bacteria from the infected host. This outcome may be achieved by slowing bacterial replication, accelerating bacterial killing, altering bacterial migration between tissues, or any useful combination thereof. Although bacterial growth and dissemination have been extensively studied in terms of molecular and cellular mechanisms [1], attempts to quantify these processes and their changes in response to therapeutic interventions remain problematic.

In a biological context, a model is defined as a simplified representation of a system or phenomenon that summarizes knowledge about that system in a usable form. While experimental models are physical representations of a real system, both in vivo and in vitro, mathematical models are conceptual and are typically formulated as systems of mathematical equations that are treated analytically or numerically. As a result, it is critical that modelers and experimentalists come together at the conceptual stages of a project to jointly design experiments, measure frequencies and time points, and manage data. Due to limited interdisciplinary training, this dialogue has not yet been extensive. However, in recent years, efforts have begun to link specific forms of experimental inference to specific mathematical modeling techniques. This creates a standardized platform that makes modeling more accessible to those with less experience and highlights the recognition of the added value of combining mathematical models and experimental data.

References

1. Endesfelder U. From single bacterial cell imaging towards in vivo single-molecule biochemistry studies. Essays Biochem.2019;63:187–196.

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF FOUR-ELECTRON SYSTEMS IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL FIRST SINGLET STATE

Tashpulatov S. M.[1]

[1]Institute of Nuclear Physics of the Academy of Science of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
sadullatashpulatov@yandex.com; toshpul@mail.ru, toshpul@inp.uz

We consider the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model [1] and investigated the structure of essential spectrum and discrete spectra of the system in the first singlet state of the system. Hamiltonian of the considering system has the form:

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^{+}_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^{+}_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + \tag{1}$$

$$+(A_0-A)\sum_{\gamma} a^{+}_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^{+}_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^{+}_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0-U)a^{+}_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^{+}_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}.$$

Here, A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; B (B_0) is the transfer integral between electrons (between electron and impurity) in a neighboring sites (for convenience, we assume that $B>0$ and $B_0>0$), $\tau=\pm e_j$ for $j=1,2,...,\nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, i.e. the summation is over the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, correspondingly in the regular (impurity) lattice site; γ is the spin index,$\gamma=\uparrow$ or $\gamma=\downarrow$, $\uparrow$ or $\downarrow$ denote the spin values $\frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{2}$, and $a^{+}_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m\in Z^{\nu}$. The four-electron first singlet state corresponds four electron bound states (or antibound states) to the basis functions: ${}^1s^0_{p,q,r,t} = a^{+}_{p,\uparrow}a^{+}_{q,\uparrow}a^{+}_{r,\downarrow}a^{+}_{t,\downarrow}\varphi_0$. The subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$, corresponding to the four-electron first singlet state is the set of all vector's of the form: ${}^1\psi^0_s=\sum_{p,q,r,t\in Z^{\nu}} f(p,q,r,t){}^1s^0_{p,q,r,t}$, $f\in l_2^{as}$, where l_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $l_2((Z^{\nu})^4)$. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $\widetilde{\mathcal{H}}_{as}$. Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\widetilde{\mathcal{H}}_{as}$. We denote by ${}^1H^0_s$ the restriction of the operator H to the subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$. We call the operator ${}^1H^0_s$ the four-electron first singlet state operator.

Theorem 1. *The essential spectrum of the operator ${}^1H^0_s$ consists of the union of ten segments and the discrete spectrum of the operator is consists of six eigenvalues, or the essential spectrum of the operator ${}^1H^0_s$ consists of the union of sixteen segments and the discrete spectrum of the operator is consists of ten eigenvalues, or the essential spectrum of the operator ${}^1H^0_s$ consists of the union of nineteen segments and the discrete spectrum of the operator is consists of sixteen eigenvalues, or the essential spectrum of the operator ${}^1H^0_s$ consists of the union of four segments and the discrete spectrum of the operator is consists of two eigenvalues.*

References

1. Hubbard J., Electron Correlations in Narrow Energy Band. Proc. Roy. Soc. A., V. 1963 276:1365, C. 238–257.

ON RADIALLY SYMMETRIC SOLUTIONS OF THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION WITH P-LAPLACIAN

Tersenov A. S.[1], **Safarov R. Ch.**[2]
[1]Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia,
[2]Karshi State University, Karshi, Uzbekistan,
a.tersenov@nsu.ru; r.safarov1@g.nsu.ru

Consider the third boundary value problem for the radial p-laplacian

$$-(|u'|^{p-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p-2}u' = F(r,u,u'), \quad r \in (0,R), \tag{1}$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(R) + \beta u(R) = 0. \tag{2}$$

where the constants $\beta > 0$, $p > 2$.

Definition. *We say that function $u(r)$ is a weak solution of (1), (2), if $u(r) \in \mathcal{C}^{1+\frac{1}{p-1}}[0,R]$, satisfy (2) and*

$$\int_0^R |u'(r)|^{p-2}u'(r)\phi'(r)dr =$$

$$\int_0^R \frac{n-1}{r}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\phi(r)dr + \int_0^R F(r,u(r),u'(r))\phi(r)dr, \quad \forall \phi(r) \in \mathbb{C}_0^\infty(0,R).$$

Suppose without loss of generality that F has the form

$$F(r,u,u') = h(x,u) + g(r,u,u'), \quad g(r,u,0) = 0. \tag{3}$$

Suppose that $g(r,u,u')$ is continuous and satisfies

$$g(s,u_1,q) - g(r,u_2,q) \le 0, \quad g(r,u_1,-q) - g(s,u_2,-q) \le 0, \quad s > r, q > 0, u_1 > u_2. \tag{4}$$

Set for some constant $M > 0$

$$\mathfrak{M} = \left\{ M \in (0,\infty) \,\Big|\, \pm F_\pm < \frac{n-1}{R}\left(\frac{M}{R+\frac{1}{\beta}}\right)^{p-1} \right\}, \; M_* = \inf \; \mathfrak{M},$$

$$F_+ = \max_{[0,R]\times[0,M]} F(r,u,-\lambda)), \quad F_- = \min_{[0,R]\times[-M,0]} F(r,u,\lambda)), \quad \lambda\left(R + \frac{1}{\beta}\right) = M,$$

$$\Phi_+ = \max_{[0,R]\times[-M,M]} F(r,u,0), \quad \Phi_- = \min_{[0,R]\times[-M,M]} F(r,u,0).$$

Introduce constants C_1 C_2

$$C_2 > C_1R + max\left[\left(\frac{\Phi_+ - \Phi_-}{2(p-1)C_1}\right)^{\frac{1}{p-2}}; \beta M\right]. \tag{5}$$

Theorem. *Suppose $F(r,u,u')$ is continuous, satisfies (4) and $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. Assume g satisfies (5). Then there exists weak solution of (1), (2), that satisfies the inequalities*

$$|u| \le M_*, \quad |u'| \le C_2,$$

where C_2 is from (5).

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR COLLIDENTS IN SINGULAR PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Toktorbaev A. M.[1], Toktomuratova Zh. E.[2]

Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic

[1]ain7@list.ru, [2]erkinbaevnajanara@gmail.com

Abstract: The work deals with urgent problem. That issue will have to be raised at the border of the starting point. In this case, it is possible to express the integral clearly. That is why the expression under the integral breaks down into a uniform asymptotic series. We use the method of agreed-upon decompositions to obtain that decomposition. The order of the system is limited to the second degree.

It is relevant to study the small movements that occur in various problems. At the beginning of the work, the problem is considered. The type of small disturbance determines the primary problem and the main objectives of the study.

Setting the issue. Consider the problem of optimal control in linear fast motion.

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), x \in R^n, u \in R^m, \tag{1}$$

$$x \mid t_0) = x_0, \tag{2}$$

$$\| u(t) \| < 1, \tag{3}$$

$$x(\nu) = 0, \ (\nu - t_0) \to min. \tag{4}$$

Here, the system (1) is controllable, and problems (1)-(4) are solvable, and since the system is controllable, problems (1)-(4) are solvable, $\forall \varepsilon > 0$ and (5)-(6) are solvable.

$$x'_\varepsilon(t) = Ax_\varepsilon(t) + Bu_\varepsilon, \ \| u_\varepsilon \| \leq 1. \tag{5}$$

$$x_\varepsilon(t_0) = x_0 + \varepsilon y, \ x_\varepsilon(\nu_\varepsilon) = 0, \ \nu_0 - t_0 \to min \tag{6}$$

Research is important in the sense of being in the department δ and during the research $\rho = 1$.

By dividing into rows

$$l_0^* c(\delta\tau) l_0 + 2\delta\rho^* c(\delta\tau) l_0 + \delta^2 \rho^* c(\delta\tau)\rho) = \delta^2 \Sigma_{n=0}^{\infty} \rho_n(\tau, \rho)\delta^n \tau^n, \tag{7}$$

here

$$\rho_0(\tau, \rho) = \frac{\tau^2}{2} l_0^* C^{11}(0) l_0 + 2\tau\rho^* c^1(0) l_0 + \rho^* c(0)\rho. \tag{8}$$

and all $F_n(\tau, \rho) - (\tau, \rho)$ A polynomial of the second degree in

Conclusion. If the initial condition is window, it is possible to establish the asymptotic solution of the optimal control problem.

NONLOCAL REACTION-DIFFUSION EQUATIONS

Torebek B. T.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
torebek@math.kz

This talk addresses the Cauchy-Dirichlet problem in the context of time-nonlocal reaction-diffusion equations. This model is particularly relevant for studying anomalous and ultraslow diffusion processes. Our research contributes to the understanding of this equation by presenting results on local and global existence, decay estimates, and conditions leading to the blow-up of solutions. Additionally, the paper explores potential quasi-linear extensions of these results and outlines several open questions for future research.

AN INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A TIME-FRACTIONAL MIXED WAVE-DIFFUSION-WAVE EQUATION

Toshpulatov M.
Andijan State University, Andijan, Uzbekistan,
muzaffar.toshpulatov89@gmail.com

Let us consider the following mixed wave-diffusion-wave equation involving the regularized Prabhakar fractional derivative in time-variable:

$$0 = \begin{cases} {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta}u(t,x) - u_{xx}(t,x), & (t,x) \in \Omega_1, \\ {}^{PC}D_{T_1t}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x) - u_{xx}(t,x), & (t,x) \in \Omega_2, \\ {}^{PC}D_{T_2t}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x) - u_{xx}(t,x), & (t,x) \in \Omega_3, \end{cases} \tag{1}$$

in a rectangular domain $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup J_1 \cup J_2$. Here

$$J_1 = \{(t,x) :\, t = T_1,\, 0 < x < 1\},\ J_2 = \{(t,x) :\, t = T_2,\, 0 < x < 1\},$$

$$\Omega_1 = \{(t,x) :\, 0 < x < 1,\, 0 < t < T_1\},\ \Omega_2 = \{(t,x) :\, 0 < x < 1,\, T_1 < t < T_2\},$$

$$\Omega_3 = \{(t,x) :\, 0 < x < 1,\, T_2 < t < T\},\ T_1,\, T_2,\, T,\, \alpha,\, \gamma,\, \delta,\, \beta_i\, (i = \overline{1,3}) \in \mathbb{R}$$

such that $T > T_1 > T_2 > 0$, $1 < \beta_1 \le 2$, $0 < \beta_2 \le 1$, $1 < \beta_3 \le 2$ and

$${}^{PC}D_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y(x) = {}^{P}I_{ax}^{\alpha,m-\beta,-\gamma,\delta}\frac{d^m}{dx^m}f(x)$$

is a regularized Prabhakar derivative of order β [1],

$${}^{P}I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}f(x) = \int_a^x (x-\xi)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\delta(x-\xi)^{\alpha})f(\xi)d\xi, x > a$$

is the Prabhakar fractional integral of order β and $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ is the Prabhakar function [2].

We are interested to find a function $u(t,x) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$, which satisfies Eq.(1) in Ω together with the following conditions:

$$u(0,x) = \varphi(x),\, 0 \le x \le 1,\ u(t,0) = u(t,1) = 0,\, 0 \le t \le T,$$

$$\lim_{t \to T_1+0} {}^{PC}D_{T_1t}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x) = \lim_{t \to T_1-0} u_t(t,x),\, 0 < x < 1,$$

$$\lim_{t \to T_2+0} u_t(t,x) = \lim_{t \to T_2-0} {}^{PC}D_{T_1t}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x)\, 0 < x < 1,$$

where $\varphi(x)$ is a given function. Similar problem was studied for a mixed wave-diffusion equation involving the regularized Prabhakar fractional derivative in [3].

References

1. D'Ovidio M., Polito F. Fractional diffusion-telegraph equations and their associated stochastic solutions//Theory Probab. Appl., 2018, Vol. 62, №4, P.552-574.

2. Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel//Yokohama Math. J., 1971, Vol.19, P.7-15.

3. Karimov E., Tokmagambetov N., Toshpulatov M. On a Mixed Equation Involving Prabhakar Fractional Order Integral-Differential Operators//Trends in Mathematics, vol. 2, chapter 25.

THE L-CATCH PROBLEM IN THE DIFFERENTIAL GAME OF THE PONTRYAGIN EXAMPLE TYPE

Turgunboeva M. A.
Namangan State University, Namangan, Uzbekistan,
turgunboyevamohisanam95@gmail.com;

We consider the L-catch problem for Pontryagin example type in a differential game with two inertial players, where the controls of both players are subject to geometric constraints. The goal of the first player (the pursuer) is to L-catch the second player (the evader) by closing the distance between them to a value of L. Conversely, the goal of the second player is to prevent the pursuer from approaching it at a distance of L.

Suppose that a player $\mathbb{P}$ (the pursuer) follows another player $\mathbb{E}$ (the evader) in the finite-dimensional space $\mathbf{R}^n$. Let their movements be described by the following differential equations with initial conditions:

$$\mathbb{P}: \quad \ddot{x} + k\dot{x} = u, \quad x(0) = x_{10}, \quad \dot{x}(0) = x_{11}, \tag{1}$$

$$\mathbb{E}: \quad \ddot{y} + k\dot{x} = v, \quad y(0) = y_{10}, \quad \dot{y}(0) = y_{11}, \tag{2}$$

where $x, y, u, v \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, $k > 0$; x_{10}, y_{10} are the initial states of the players, and x_{11}, y_{11} are their initial velocity vectors it is presumed that $|x_{10} - y_{10}| > L$, $L > 0$ and $x_{11} = y_{11}$ at the beginning of the game; the acceleration vectors u, v act as control parameters of the players respectively, and they depend on the time t, $t \geq 0$.

The controls u and v are regarded as measurable functions $u(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbf{R}^n$ and $v(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbf{R}^n$ accordingly, and they are subject to the constraints

$$|u(t)| \leq \alpha \ \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{3}$$

$$|v(t)| \leq \beta \text{ for almost every } t \geq 0. \tag{4}$$

which are usually termed the geometrical constraints (in short, the G-constraints), where α and β are non-negative numbers which designate the maximal acceleration values of $\mathbb{P}$ and $\mathbb{E}$ [1].

Definition 1. [2] *Let $\alpha > \beta$. Then in the differential game (1)–(4), we term the function $\boldsymbol{u}(z_{10}, v) = v + \gamma(z_{10}, v)\,(m(z_{10}, v) - z_{10})$ the Π_L-strategy of the pursuer, where*

$$\gamma(z_{10}, v) = \left[\langle v, z_{10}\rangle + \alpha L + \sqrt{(\langle v, z_{10}\rangle + \alpha L) + (\alpha^2 - |v|^2)(|z_{10}|^2 - L^2)}\right] / (|z_{10}|^2 - L^2),$$

$$m(z_{10}, v) = -(v - \gamma(z_{10}, v) z_{10}) L / |v - \gamma(z_{10}, v) z_{10}|.$$

Theorem 1. *Let $\alpha > \beta$. Then the Π_L-strategy is winning on the interval $[0, t^*]$, where t^* is a positive root of the equation*

$$e^{-kt} = -kt + B, \quad B = 1 + \frac{k^2(|z_{10}| - L)}{\alpha - \beta}.$$

PROPERTIES OF SOLUTIONS OF MULTIVARIATE INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS OF VOLTERRA-FREDHOLM TYPE IN THE SPACE OF $C[-1, 1+a]$

Yazymov M.,[1] Ashyraliyeva A. N.[2]

International University for the Humanities and Development, Ashgabat, Turkmenistan,
[1]musayazymov@gmail.com; [2]ashyrgul8@gmail.com

In this work in the following space

$$C[-1, 1+a], [-1, 1+a] = [-1, 1+a_1] \times \cdots \times [-1, 1+a_m],$$

sufficient conditions are found for the unique solvability and continuous dependence of the solution on the parameters of multivariate integro-functional equation of Volterra-Fredholm type in the space of continuous functions

$$x(t) = F\left(t, x(t), \int_{a_1-t_1}^{t_1} \cdots \int_{a_p-t_p}^{t_p} \int_{-1}^{1+a_{p+1}} \cdots \int_{-1}^{1+a_{m+1}} K(t, s, x(s)) ds_1 \cdots ds_1\right)$$

where $t = (t_1, t_2, \cdots, t_m), s = (s_1, s_2, \cdots, s_m), a = (a_1, a_2, \cdots, a_m) \geq 0$.

REFERENCES

1. Gurbanmammedov N, Ashyralyyeva A., Properties of solutions of multivariate integro-functional equations of Volterra-Fredholm type// Bilim, Vol.1, No.1, 2021, pp.56-62.

2. Ashyralyyeva Ashyrgul. Properties of the solutions of the multivariate integrofunctional equations of Wolterra-Fredholm type in the space of continuous functions //Scientific-theoretical journal of the Academy of Sciences of Turkmenistan, №6, 2022.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PSEUDO-HYPERBOLIC TYPE EQUATION WITH A VARIABLE COEFFICIENT

Zikirov B. Z.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
zikirovbobur7@gmail.com

In the domain $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ t > 0\}$, we consider the time-fractional diffusion wave equation:

$$U_{tt} - U_{xx} - U_{xxtt} + q(t)U(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

with the initial and boundary conditions

$$U(x,t) = \varphi(x)\ ,\ U_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

$$U(0,t) = U(l,t) = 0\ ,\ 0 \leq t \leq T \tag{3}$$

By applying the Fourier method, the solution $U(x,t)$ of the problem (1)-(3). Can be expanded in a uniformly convergent series in term of eigenfunctions the form.

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)X_n(x) \tag{4}$$

The coefficients $U_n(t)$ for $n \geq 1$ are to be found by making use of the orthogonality of the eigenfunctions $X_n(x)$. In this case $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}sin\frac{\pi n}{l}x$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$. $n = 1, 2...$

Its general solution is in the following form.

$$T_n(t) = C_1 cosA_n t + C_2 sinA_n t + \int_0^t \frac{f_n(\tau)sinA_n(t-\tau)}{\lambda_n\sqrt{1+\lambda_n^2}}d\tau - \int_0^t \frac{q(\tau)T_n(\tau)sinA_n(t-\tau)}{\lambda_n\sqrt{1+\lambda_n^2}}d\tau$$

The initial-boundary problem and inverse problems for fractional differential equations have been studied in many research works [1]-[5]. The existence and uniqueness of the solution to the problem is proved

REFERENCES

1. Kozhanov A. I. Hyperbolic equations with unknown coefficients // Symmetry. 2020. Vol. 12, no. 9. P. 1539.

2. Lorenzi A., Paparoni E. Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operetor equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 1993. Vol. 5, no. 19. P. 523Ц548.

3. Kozhanov A. I., Safiullova R. R. Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2010. Vol. 18, no. 1. P. 1Ц18.

4. Kozhanov A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht : VSP, 1999.

5. Durdiev D.K. and Turdiev H.H. Inverse coefficient problem for a timefractional wave equation with initial-boundary and integral type overdetermination conditions // Math. Meth. Appl. Sci. 2024, 47 (6), 5329-5340.

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИЛЬНО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИНТЕГРАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ФИ-ФУНКЦИИ

Абдуахадов А. А.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
Ташкентский международный университет, Ташкент, Узбекистан;
e-mail:alibekabduaxadov@gmail.com;

Численное интегрирование определённых интегралов имеет важное значение в фундаментальных и прикладных науках. Погрешность приближённых вычислений интегралов зависит от исходных данных и конкретных требований, что приводит к наложению различных условий на полученные вычисления.

В данной работе рассматривается задача построения оптимальной квадратурной формулы методом φ-функций. Погрешность квадратурной формулы оценивается сверху с использованием интеграла квадрата функции φ из гильбертова пространства. Далее, выбирается такая функция φ, при которой интеграл квадрата на этом интервале принимает наименьшее значение. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы рассчитываются с использованием полученной φ функции . Полученная оптимальная квадратурная формула точна для функций $e^{\sigma x}$ и $e^{-\sigma x}$, где σ - ненулевой действительный параметр.

Литература

1. Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M. Journal of Applied Analysis and Computation. 2017. T. 7, №4. C. 1233–1266.

2. Hayotov A.R., Babaev S.S. AIP Conference Proceedings. 2021. T. 2365, №1. C. 020021.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ

Абдумиталип уулу К.
Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан
kubatbek0312@gmail.com

В области D, ограниченной отрезками $AC: x+y=0, CB: x-y=\ell(\ell>0), BB_0: x=\ell, B_0A_0: y=h(h>0), AA_0: x=0$, рассмотрим уравнение

$$L_1 L_2 u = 0, \tag{1}$$

где

$$L_1 = \begin{cases} \ell_1 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} + a_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + c_1(x,y), y>0, \\ \ell_2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + c_2(x,y), y<0, \end{cases} \quad L_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где $a_i(x,y), c_i(x,y), (i=1,2), b_2(x,y)$ - заданные функции, удовлетворяющие условиям:

$$a_1(x,y), a_{1x}(x,y), a_{1y}(x,y), c_1(x,y) \in C(\overline{D_1}),$$
$$a_2(x,y), a_{2x}(x,y), b_2(x,y), b_{2y}(x,y), c_2(x,y) \in C(\overline{D_2}).$$

В области D для уравнения (1) рассматривается

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x,y)$ со следующими условиями:
1) $u(x,y)$ является решением уравнения (1) в области $D \backslash (y=0)$;
2) $u(x,y) \in C^1(D)$;
3) $L_2(u), L_2(u_x), L_2(u_y) \in C(D)$;
4) удовлетворяет краевым условиям:
$u|_{AA_0} = \varphi_1(y), u|_{BB_0} = \varphi_2(y)$, $u_{xx}|_{AA_0} = \varphi_3(y), u_{xx}|_{BB_0} = \varphi_4(y)$, $0 \le y \le h$,
$u|_{AC} = \psi_1(x), 0 \le x \le \frac{\ell}{2}$, $u|_{BC} = \psi_2(x), \frac{\ell}{2} \le x \le 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{BC} = \psi_3(x), \frac{\ell}{2} \le x \le 0$,
где n - внутренняя нормаль, $\varphi_i(y)(i=\overline{1,4}), \psi_j(x)(j=\overline{1,3})$ - заданные функции.

Методом интегральных уравнений доказано существование и единственность решение задачи 1.

Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с двумя независимыми переменными второго, третьего и четвертого порядков изучены в работах [1] - [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. - Ташкент: Фан, 1979. - 240 с.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. - Ташкент: Фан, 1986. - 220 с.

3. Джураев Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.- Ташкент: Фан, 2000. - 144 с.

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ СМЕШАННО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Акбарова С. Х.[1], Акбарова М. Х.[2]

[1]Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан,
akbarovasx1969@gmail.com;
[2]Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан,
margubaakbarova66@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} - sgnx|x|^n u_y = 0 \tag{1}$$

в области $D = D^\infty \cup I \cup D_0$, где $D^\infty = \{(x,y) : 0 < x < \infty, 0 < y \leq Y\}$ и $D_0 = \{(x,y) : -h < x < 0, 0 \leq y < Y\}$ - прямо и обратно-параболические части[1], $I = \{(x,y) : x = 0, 0 \leq y \leq Y\}$, $h = (2q)^{\frac{1}{q}}$, $2q = n+2, n = const > -1, Y = const > 0$.

Для уравнеия (1) изучена краевая задача типа Бицадзе-Самарского в работе[1].

Задача I. Определить функцию $u(x,y$, обладающую свойствами:

1) $u(x,y) \in C^1(D) \cap C^{2,1}(D^\infty \cup D_0)$ и непрерывна вплоть до границы области ;

2) удовлетворяет уравнение (1) в областях D^∞, D_0.

3) выполняются краевым условиям:

$$u(x,y)|_{y=0} = \varphi(x), 0 \leq x < \infty, \tag{2}$$

$$u(x,y)|_{y=0} = \psi(x), -h \leq x \leq 0, \tag{3}$$

$$\int_{-h}^{0} u(x,y)dx = \mu(y), 0 \leq y \leq Y, \tag{4}$$

где $\varphi(x), \psi(x), \mu(y)$ - заданные функции, причем $\varphi(x)$ - ограничена в $[0,\infty)$, $\psi(x) \in C[-h,0] \cap C^2(-h,0)$, $\mu(y) \in C[0,Y] \cap C^1(0,Y])$. $\int_{-h}^{0} \psi(x)dx = \mu(Y)$, $\psi(x) = \mu(Y)$.

Доказано существование и единственность решения задачи I.

Литература

1. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968.

2. Akbarova S. X., Akbarova M. X. A problem of Bitsadze-Samarskiy type for a degenerate parabolic equation of mixed type //Actual problems of applied mathematics and information technologies –Al–Khwarizmi 2023.2023. September 25-26. P. 177.

ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Акматов А.А.[1], Алиева Б. А.[2], Алиева А.А.[3]

[1,2]Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызская Республика
[1]abdilaziz_akmatov@mail.ru, [2]burizaalieva@gmail.com,
[3]Кыргызский национальный университет имени Жусупа Баласагына, г. Бишкек,
alievaajgerim814@gmail.com

Рассматривается задача

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\big[h(t) + f(t, x(t,\varepsilon))\big], \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon << 1$ - малый параметр, $x(t,\varepsilon)$ - неизвестная искомая функция, $a(t)$-скалярная функция, $x^0 - const$.

Требуем выполнения следующих условий:

U 1. $f(t,0) \equiv 0,\ \forall (t,x) \in H,\ H = \{(t,x), t \in D, |\ x\ | \leq M_0\},\ 0 < M_0 - const,$ $f(t,x) \in \Phi(H),\ \Phi(H) - H$ - пространства аналитических функций,$f(t,0) \equiv 0;$ $|\ f(t,\tilde{x}) - f(t,\tilde{\tilde{x}})\ | \leq M\ |\ \tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\ |$, здесь $0 < M$ - некоторые постоянные число не зависящее от ε.

U 2. $a(t), h(t) \in \Phi(D),\ D \subset C, D = \{t \in C, |\ t\ | < r_0 \in R\}, r_0$ - достаточно большое число, $a(t) > 0,\ -\infty < t < 0; a(0) = 0,\ Re\lambda(t) < 0,\ 0 < t < +\infty$

Решение задачи (1)-(2):

$$x(t,\varepsilon) = x^0 exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t} exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} a(s)ds\right)\cdot[h(\tau) + f(\tau, x(\tau,\varepsilon))]d\tau. \tag{3}$$

Начальная точка совпадает с точкой смены устойчивости. В итоге появится двухсторонне устойчивая область. В окрестности начальной точки появится пограничный слой, которые влияет к оценку решению (3). Решение задачу (1)-(2) рассматривается в пространстве обобщенных функций[1].

Литература

1. **Акматов А. А.** Поведение решений системы сингулярно возмущенниальных уравнений с обобщенными неоднородными частями [Текст]/ Асамидинова Д. Ж., Худайбердиева У. А /Журнал бюллетень науки и практики//-г. Нижневартовск.- С.1-7. 2024

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Акматов А.А.[1], Токторбаев А.М.[1], Мамаджанова К.М.[2]
Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызская Республика
[1]abdilaziz_akmatov@mail.ru, [1]ain7@list.ru, [2]kylymm.01@gmail.com

Рассматривается задача

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = J(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\big[h(t) + f(t, x(t,\varepsilon))\big], \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon << 1$ – малый параметр, $[t_0, T]$ – отрезок действительной оси, $x(t,\varepsilon)$ – неизвестная искомая функция, $J(t) = \begin{pmatrix} \lambda(t) & 0 \\ 1 & \lambda(t) \end{pmatrix}$

Требуем выполнения следующих условий:

U 1. $f(t,0) \equiv 0,\ \forall (t,x) \in H,\ H = \{(t,x), t \in D, \parallel x \parallel \leq M_0\},\ 0 < M_0 - const,\ \ f(t,x) \in \Phi(H),\ \Phi(H) - H$ - пространства аналитических функций,$f(t,0) \equiv 0,\ \parallel f(t,\tilde{x}) - f(t,\tilde{\tilde{x}}) \parallel \leq M_1 \parallel \tilde{x} - \tilde{\tilde{x}} \parallel$, здесь $0 < M_1$ - некоторые постоянные число не зависящее от ε.

U 2. $\lambda(t), h(t) \in \Phi(D),\ D \subset C, D = \{t \in C, \mid t \mid < r_0 \in R\}, r_0$ – достаточно большое число.

Если собственные значения матрицы имеют только действительные значения, тогда нули собственных значений принадлежать в действительной оси. Тогда с влиянием неоднородной части уравнением (1) не выполняется явления затягивение потерии устойчивости [1]. При отсуствии малой возмущении [2], выполняется явления затягивание потери устойчивости. Оказалось, что при наличии малой возмущении, также выполняются явления затягивании потери устойчивости.

Литература

1. **Алыбаев, К.С.** Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Дисс. ... д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. - Бишкек, 2001. - 204 с.

2. **Акматов А. А.** Кичине козголуунун сингулярдык козголгон тендеменин чечиминин туруктуулугунун узартылышына тийгизген таасири.// К. Алымкуловдун 80 жылдык маарекесине арналган "Математика жана билим беруунун актуалдуу маселелери" аттуу эл аралык конференция. - Ош, 2023. - 264 с.

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ M ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

Алдашев С. А.

Институт математики и математического моделирования, Алматы;
aldash51@mail.ru

Многомерные гиперболо-эллиптические уравнения описывают важные физические, астрономические и геометрические процессы.

Теория краевых задач для гиперболо-эллиптических уравнений на плоскости хорошо изучена, а их многомерные аналоги интенсивно изучаются.

Смешанная задача **M** на плоскости для уравнения Лаврентьева-Бицадзе впервые изучались в работах А.В.Бицадзе, где показаны ее однозначная разрешимость. На гидродинамический смысл этой задачи обратил внимание Ф.И. Франкль.

Однако многомерный аналог задачи **M** ранее не исследованы.

В данной работе получен критерий единственности классического решения задачи **M** для многомерного уравнения Лавнентьева-Бицадзе.

Пусть $\Omega_\beta-$ конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная при $t > 0$ сферической поверхностью $\Gamma : |x|^2 + t^2 = 1$, а при $t < 0$ конусами $K_\beta : \beta|x| = -t, K_1 : |x| = 1 + t, -\frac{\beta}{1+\beta} \leq t \leq 0$, где $|x|$ - длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, а $0 < \beta \leq 1$.

Обозначим через Ω^+ и Ω_β^- части области Ω_β, лежащие полупространствах $t > 0$ и $t < 0$.

В области Ω_β рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$\Delta_x u + (sgnt)u_{tt} = 0, \qquad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m, m \geq 2$.

В качестве многомерной смешанной задачи **M** рассматривается

Задача M. Найти решение уравнения (1) в области Ω_β при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega_\alpha^-)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_\Gamma = 0, \quad u\Big|_{K_\beta} = 0.$$

Отметим, что при $\beta = 1$ эта задача совпадает с задачей Трикоми, которая изучена в [1].

Справедлива

Теорема. Решение задача **M** $u(x, t) \equiv 0 \Leftrightarrow 1$.

Литература

1. Алдашев С.А. Критерий единственности решения задачи Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева - Бицадзе // Дифференц уравнения, 2021, т. 57, №11. –С. 1564–1567.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОРЯДКАМИ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Алимбекова Н. Б.[1], Бакишев А. К.[1], Мадияров М. Н.[1], Ергалиев Е. К.[1]

[1]Восточно-Казахстанский университет имени С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан,

e-mail: nurlana1101@gmail.com

В последние несколько десятилетий уравнения, содержащие производные дробного порядка, стали предметом всестороннего исследования не только с математической точки зрения, но также получили широкое применение при моделировании естественных и технологических процессов в сложных средах. Основное их применение связано с учетом важного свойства среды – памяти, которое позволяет учесть не только текущее состояние процесса, но также все ее предыдущие состояния.

В данной работе представлено исследование применения конечно-элементных методов для решения дробно-дифференциальной задачи для уравнения с переменными порядками дробных производных:

$$\partial_t p + c_\phi \partial_t^{\alpha(t)} p + c_f \partial_t^{\beta(t)} p - \partial_t^{\gamma(t)} \nabla \cdot (\kappa(x) \nabla p) = f,\ x \in \Omega,\ t \in J,$$

В области $\bar{Q}_T$, где $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times J$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, $J = (0, T]$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t) \in (0,1)$ для всех $t \in \overline{J}$, где c_ϕ , c_f – обобщенные дробно-дифференциальные изотермические сжимаемости, $\kappa(x)$ – заданная функция, а дробная производная Капуто переменного порядка определяется следующим образом:

$$\partial_t^{v(t)} p(\cdot, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - v(t))} \int_0^t \frac{\partial_t p(\cdot, s)}{(t-s)^{v(t)}} ds.$$

Уравнение дополняется соответствующими начальными и граничными условиями.

Построен конечно-элементный метод для численного решения задачи и проведено теоретическое исследование устойчивости и сходимости метода с использованием априорных оценок. Результаты исследований подтверждаются сравнительным анализом эмпирического и теоретического порядков сходимости на основе вычислительных экспериментов. Кроме того, проведен анализ влияния переменных порядков дробных производных на процесс фильтрации жидкости в гетерогенной среде, представляя новые научные и практические результаты в области моделирования пористых сред и фильтрации жидкости.

Данное исследование профинансировано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP19679550).

Литература

1. Caputo M. Models of flux in porous media with memory. Water Resources Research, 2000. Vol. 36, №. 3 p. 693–705.

2. Jia J.; Wang H.; Zheng X. A preconditioned fast finite element approximation to variable-order time-fractional diffusion equations in multiple space dimensions. Applied Numerical Mathematics, 2021. Vol. 163, p. 15–29.

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ НА ВНУТРЕННИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Аллакова Ш. И.[1], **Мирсабуров М.**[2]

Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан
[1]shaxnoza.allakova@mail.ru, [2]mirsaburov@mail.ru

Пусть Ω -конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0(y = \sigma_0(x)) : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1, 0),\ B(1, 0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0. \tag{1}$$

Пусть $p(x) = ax - b$ и $q(x) = a - bx$ линейные диффеоморфизмы из множества точек отрезка $[-1, 1]$ в множества точек отрезков $[-1, c]$ и $[c, 1]$ соответственно, где $a = (1 + c)/2,\ b = (1 - c)/2$, причем $p(-1) = -1,\ p(1) = c,\ q(-1) = 1,\ q(1) = c$.

В задачах со смешением [1], носителями краевых данных были граничные характеристика AC и BC. В данной работе исследуется корректность задачи, где носителями условий смешения будут внутренние характеристики EC_0 и EC_1.

Задачи JN В области Ω требуется найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

2) функция $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области Ω^-;

3) на интервале вырождения выполняется условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x \in I \setminus \{c\},$$

причем эти пределы при $x = 1$ могут имет особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/(2(m + 2)) \in (0, 1/2)$;

4) выполнены условия

$$u(x, y)\,|_{\sigma_0} = \varphi(x),\ x \in \overline{I},$$

$$a_0 u\left[\theta_0^*(q(x))\right] + b_0 u\left[\theta_1^*(p(x))\right] = \psi(x),\ x \in \overline{I}, u(p(x), 0) - u(q(x), 0) = f(x),\ x \in \overline{I}.$$

Теорема 1. *Решение* $u(x, y)$ *задачи* JN *при выполнении условий* $\psi(x) \equiv 0,\ f(x) \equiv 0,\ a_0 > 0,\ b_0 > 0$, *своего наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) принимаеть только в точках нормальной кривой* $\overline{\sigma_0}$.

Литература

1. Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии Учен.зап. Казанск. ун-та. 1962. 122(3). -С. 3–16.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОПАРНО КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫМИ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

Алыбаев К. С.[1], Нурматова М. Н.[2]

Жалал-Абадский государственный университет, Жалал-Абад, Кыргызстан,
[1]alybaevkurmanbek@rambler.ru [2]nurmatova_mairamgul@mail.ru

Пусть рассматривается система уравнений

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = A(y)\tilde{x}(t,\varepsilon) + V(\tilde{x}(t,\varepsilon))\tilde{x}(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$y' = 1, \tag{2}$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, y(t_0) = t_0 \tag{3}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр; $t \in \Omega \subset C$ – множество комплексных чисел, $\Omega = \{t \in C, |t| < r_0, r_0 \in R -$ множество вещественных чисел и $r_0 \gg |t_0|\}$,

$x = colon(x_1, , x_n), \tilde{x} = colon(x_1 - y, x_2, x_3 - y, x_4, , x_{2n-1} - y, x_{2n})$,

$A(y) = \begin{pmatrix} A_1(y) & 0 & 0 \\ 0 & A_2(y) & 0 \\ 0 & 0 & A_n(y) \end{pmatrix}, A_j(y) = \begin{pmatrix} y & -\alpha_j \\ \alpha_j & y \end{pmatrix}, (j = 1, \ldots, n), 0 < \alpha_1 < \ <$ α_n; $V(\tilde{x}(t,\varepsilon)) = ((x_1 - y)^2 + x_2^2 + (x_3 - y)^2 + x_4^2 + ... + (x_{2n-1} - y)^2 + x_{2n}^2)$.

Матрица A(y) имеет 2n, попарно комплексно-сопряженных, собственных значений вида $\lambda_{2j-1}(y) = y + i\alpha_j, \lambda_2 j(y) = y - i\alpha_j, j = 1, , n, i = \sqrt{(} - 1)$.

Система (1), в пространстве быстрых движений, в точке (y,0,y,0,Ж,y,0) имеет положение равновесия. Это положение равновесия устойчиво при y<0 и неустойчиво при y>0, т.е. при переходе значения y=0 устойчивость положения равновесия теряется.

Задача. Исследовать решения уравнений (1)-(2), при заданных начальных значений (3), на ЗР.

Доказана:

Теорема. $x(t,\varepsilon)$Црешение задачи (1), (3) существует на отрезке $[t_0, \alpha_1]$ $(t_0 = -\sqrt{\alpha_1(2\alpha_n + \alpha_1})$ и справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon) = (y, 0, y, 0, , y, 0)$$

т.е. происходит задержка решения, при смене устойчивости положения равновесия, вблизи возникшего неустойчивого положения равновесия.

Для доказательства теоремы использованы методы изложенные в [1], [2].

Литература

1. Алыбаев К.С., Нурматова М.Н. Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений //Бюллетень науки и практики. 2023. Т.9, №12. С. 12–19.

2. Alybaev K.S., Dzhuraev A.M., Nurmatova M.N. Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Т.45, №3. P. 1178–1187.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Апаков Ю. П.[1], Мамажонов С. М.[2]

[1]Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан,
[1]Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан,
yusupjonapakov@gmail.com;
[2]Кокандский университет, Коканд, Узбекистан,
sanjarbekmamajonov@gmail.com

В настоящем сообщении рассматривается уравнение

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0, \tag{1}$$

в области G плоскости xOy, где $a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$, причем $a_i^2+b_i^2 \neq 0$, $(i=1,2)$; $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, а G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках $C(2,0)$, $E(1/2,-3/2)$, $D(-1,0)$; G_3 и G_4 – прямоугольники с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0 и B, B_0, $C_0(2,1)$, $C(2,0)$ соответственно; J_1, J_2 и J_3 – открытые отрезки с вершинами в точках C, D; A, A_0 и B, B_0 соответственно, а

$$Lu=\begin{cases} u_{xx}-u_y, \ (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, \ (x,y)\in G_j, \ j=2,3,4.\end{cases}$$

В зависимости от коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2 можно поставить различные краевые задачи для уравнения (1).

Здесь мы будем поставить и исследовать только одну краевую задачу для уравнения (1) в области G при $a_1=a_2=1$, $b_1=b_2=0$. В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Lu)=0. \tag{2}$$

Для уравнения (2) ставится следующая задача:

Задача M**.** Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\backslash J_1\backslash J_2\backslash J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (2), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} и u_{yy} – непрерывны вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях;

2) удовлетворяет уравнению (2) в области $G\backslash J_1\backslash J_2\backslash J_3$;

3) удовлетворяет краевым условиям и условиям склеивания на линиях изменения типа.

Теорема. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_4 \in C^3[0,1]$, $\varphi_6 \in C^2[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[1/2,2]$, $\psi_2 \in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3 \in C^4[0,1/2]$, $\psi_4 \in C^3[-1,1/2]$, $\psi_5 \in C^2[-1,1/2]$, причем выполняется условие согласования $\varphi_1(0)=\psi_1(2)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(-1)$, тогда задача M имеет единственное решение.

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Апаков Ю. П.[1], Умаров Р. А.[2]

[1]Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан
yusupjonapakov@gmail.com;

[1,2]Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
r.umarov1975@mail.ru

В области $D = \{(x, y) : \quad 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$ рассмотрим следующее уравнения третьего порядка вида

$$L(u) = U_{xxx} - U_{yy} + A_1 U_{xx} + A_2 U_x + A_3 U_y + A_4 U = g_1(x, y), \tag{1}$$

где $A_i,\ p,\ q \in R,\ i = \overline{1,4},\ g_1(x, y)$ заданная, достаточно гладкая функция. Заменой

$$U\left(x, y\right) = \exp\left(-\frac{A_1}{3}x + \frac{A_3}{2}y\right) u\left(x, y\right),$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx} - u_{yy} + a_1 u_x + a_2 u = g(x, y), \tag{2}$$

где $a_1, \quad a_2 \in R, \quad g(x, y)$ представлена заданными функциями

Задача *A.* Найти функцию $u\left(x, y\right)$ из класса $C^{3,2}_{x,y}\left(D\right) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$u\left(x, 0\right) = 0, \qquad u_y\left(x, q\right) = 0, \quad 0 \le x \le p,$$

$$u_{xx}\left(0, y\right) = \psi_1\left(y\right), \quad u\left(p, y\right) = \psi_2\left(y\right), \quad u_x\left(p, y\right) = \psi_3\left(y\right), \quad 0 \le y \le q,$$

где $\psi_i\left(y\right) \in C^3\left[0, q\right],\ i = \overline{1,3},\ g\left(x, y\right) \in C^{1,2}_{x,y}\left[0, q\right]$ заданные функции.

Решение задачи A найдено методом разделения переменных и выписано через построенную функцию Грина [1], были найдены собственные значения и собственные функции следующей спектральной задачи:

$$\begin{cases} Y'' + \lambda^3 Y = 0, \\ Y(0) = Y'(q) = 0, \end{cases}$$

в виде $Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q} y\right)$. Следующая лемма для системы собственных функций доказывается с использованием теоремы из литературы [2].

Лемма.Система функций $Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q} y\right)$, $n = 1, 2, ...$ полна в $L_2\left(0, q\right)$.

Литература

1. Apakov Y. P., Umarov R. A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. – Vol 43:3. – pp. 738–748.

2. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. Москва.: Из. Иностранной литературы. 1960. 301 с. Ст.125.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Аркабаев Н. К.[1]

[1]Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан,
nurkasym@gmail.com

В статье исследуется проблема единственности решения задачи сопряжения для уравнений в частных производных третьего порядка с характеристической линией и ее применение в регуляризации нейронных сетей.

Рассмотрено система уравнений в частных производных третьего порядка в области $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \bigcup \Gamma$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1, y > 0\}$, $\Omega_2 = \{(x,y) : 0 < x < 1, y < 0\}$, $\Gamma = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$ – характеристическая линия.

$$u_{xxy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u), \qquad y > 0, \tag{1}$$

$$u_{yyy} + c(x,y)u_x + d(x,y)u_y = g(x,y,u), \qquad y < 0, \tag{2}$$

где $u(x,y)$ – искомая функция, $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$ – заданные коэффициенты, f и g – известные функции.

Условия сопряжения

$$[u] = \varphi_1(x), \quad [u_y] = \varphi_2(x), \tag{3}$$

где [ ] обозначает скачок функции на Γ, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – заданные функции.

Краевые условия

$$u_x(0,y) = \psi_1(y), \quad u_x(1,y) = \psi_2(y), \quad y > 0, \tag{4}$$

$$u(0,y) = \chi_1(y), \quad y < 0, \quad u(x,-h) = \chi_2(x), \quad u_y(x,-h) = \chi_3(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{5}$$

Доказана теорема о единственности решения для рассматриваемого класса уравнений. На основе полученных теоретических результатов разработан новый метод регуляризации нейронных сетей, учитывающий физические ограничения задачи. Проведено сравнение классического метода конечных разностей и инновационного подхода на основе физически–информированных нейронных сетей. Проведено численные эксперименты. Регуляризованные нейронные сети продемонстрировали меньшую среднеквадратичную ошибку, лучшее соблюдение условий сопряжения и более высокую устойчивость к изменениям входных данных по сравнению с классическими методами и стандартными нейронными сетями.

Литература

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019. №378. –P. 686–707.

2. Джураев Т.Д., Попелок Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. №10. –С. 1734–1745.

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

Артюшин А. Н.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
alexsp3@yandex.ru;

Пусть $Q = (0,T) \times (0,1)$, $0 < \nu, \mu < 1$, $1 < p$. Пусть $u(t,x) \in L_p(Q)$ такова, что

$$\partial_t^{\nu} u(t,x) \in L_p(Q), \quad \partial_x^{\mu} u(t,x) \in L_p(Q).$$

Предположим, что

$$\frac{1}{p} > \frac{\nu\mu}{\nu+\mu},$$

и положим

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\nu\mu}{\nu+\mu}.$$

Тогда, согласно известной теореме вложения, справедливо включение $u(t,x) \in L_q(Q)$.

В докладе рассматривается случай переменных показателей гладкости $\nu = \nu(x)$, $\mu = \mu(t)$ и некоторые другие обобщения.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКА

Ашурова Г.Р.[2], Кожанов А.И.[1]

[1]Институт математики им. С.Л.Соболева, Россия
kozhanov@math.nsc.ru;
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
ashurova.guzel@gmail.com;

В данной работе рассматривается обратная задача для вырожденного дифференциального уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Исследуются условия, при которых можно определить неизвестные параметры и внешнее воздействие (свободный член) на основе заданных данных. Особое внимание уделяется характеристикам вырождения, зависящим от временной переменной, и их влиянию на поведение решения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, обладающих всеми необходимыми обобщчнными производными по С. Л. Соболеву. Полученные результаты предоставляют новые подходы к решению обратных задач в данной области, что может быть полезно для применения в теоретических и прикладных исследованиях.

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$. Далее пусть $\varphi(t), c(x,t), f(x,t), N(x), h(x,t), \mu(t)$ заданные функции, определенные при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$.

Рассматриваются обратные задачи нахождения неизвестных функции $u(x,t)$ и $q(t)$ в различных постановках в прямоугольнике Q связанных уравнением

$$u_t(x,t) + \varphi(t)u_{xxx}(x,t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t) + q(t)h(x,t).$$

Литература

1 Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным иинтегральным переопределением/Математический сборник. 1992, —183:4, —45-68.

2. Кожанов А.И., Лукина Г.А. Вырождение в дифференциальных уравнениях с кратными характеристиками. Математические заметки СВФУ, 2021. Том 28, №3

3. Tikhonov, A.N., and Samarskii, A.A. Введение в теорию дифференциальных уравнений математической физики и вырождения. Equations of Mathematical Physics, 2014. Dover Publications.

4. Lions, J.-L., and Magenes, E. Подробное обсуждение обратных задач и регулярности решений. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Springer, 1972.

ЗАДАЧА КОШИ С ДАННЫМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Аттаев А. Х.

Институт прикладной математики и автоматизации - филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения Федеральный научный центр "Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук,"Нальчик, Россия, Кабардино-Балкарская республика

Attaev.anatoly@yandex.ru

В работе рассматривается уравнение

$$Lu = \lambda u(x-y,0) + \mu u(x+y,0), \tag{1}$$

где

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{2}$$

λ, μ – произвольные действительные константы.

Пусть Ω – конечная односвязная область плоскости независимых переменных x и y, ограниченная характеристиками $AC : x-y=0$, $AD : x+y=0$, $BC : x+y=1$, $BD : x-y=1$ оператора (2).

В дальнейшем через J будем обозначать единичный интервал $(0,1)$.

Задача Коши. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{AC} = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{du}{d\vec{n}}\bigg|_{AC} = \nu(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

где $\vec{n}$ - внутренняя нормаль к AC, $\tau(x) \in C^1(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $\nu(x) \in C^2(\overline{J}) \cap C^3(J)$.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть* $\lambda \neq 0$,

$$\nu'(0) = (\lambda+\mu)\tau(0),$$
$$\nu''(0) = \lambda\left(\tau'(0) + \nu(0)\right).$$

Тогда решение задачи Коши (3),(4) для уравнения (1) существует, единственно и выписывается по формуле

$$u(x,y) = \frac{1}{\lambda}\nu'(x+y) + \tau(x-y) - (x+y)[\nu(x+y) - \nu(x-y)] -$$
$$-\frac{\mu}{\lambda} y[\nu(\xi+y) - \nu(0)] + \frac{\mu}{\lambda}[2(\lambda+\mu)(y^2+xy) - 1]\tau(0). \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что область влияния и область определения данных Коши, когда они задаются на характеристике AC для уравнения (1) совпадают с областью влияния и областью определения данных Коши, когда они задаются на отрезке AB оси абсцисс, но для уравнения (1), когда $\lambda = \mu = 0$, то есть для уравнения колебания струны $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Балкизов Ж. А.

Институт прикладной математики и автоматизации
"Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук"
Нальчик, Россия, Кабардино-Балкарская республика
Giraslan@yandex.ru

В работе на евклидовой плоскости точек $(x,\, y)$ рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, \quad y < 0, \\ u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u + f(x,y), \quad y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где m, $\lambda-$ заданные числа, причем $m > 0$, $|\lambda| \le \frac{m}{2}$; $a\,(x,y)$, $b\,(x,y)$, $c\,(x,y)$, $f\,(x,y)-$ заданные функции; $u = u\,(x,y)-$ искомая функция.

Уравнение (1) рассматривается в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$, где Ω_1- это область, ограниченная при $y < 0$ характеристиками $\sigma_1 = AC:\ x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0$ и $\sigma_2 = CB:\ x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$ уравнения (1), выходящими из точки $C = (r/2, y_C)$, $y_C = -\left[\frac{r(m+2)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}}$, проходящими через точки $A = (0,0)$ и $B = (r,0)$, соответственно, и отрезком $I = AB$ прямой $y = 0$; Ω_2- прямоугольная область, ограниченная отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B и AB прямых $x = 0$, $y = h$, $x = r$, $y = 0$ $(h > 0,\ r > 0)$, соответственно, при $y > 0$.

Регулярным в области Ω *решением* уравнения (1) назовем функцию $u = u\,(x,\, y)$ из класса $u\,(x,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega\right) \cap C^2\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right)$; $u_x(x,0)$, $u_y(x,0) \in L_1(0,r)$ при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Аналогом задачи Трикоми для уравнения (1) является следующая

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \;\; u(r,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u\left[\theta_0(x)\right] = \psi(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{3}$$

где $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -(2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}x^{1-\varepsilon}\right)$, $\varepsilon = \frac{m}{m+2}$; $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)-$ заданные на отрезке $[0,h]$ функции, а $\psi(x)-$ заданная на отрезке $[0,r]$ функция, причем выполнено условие согласования: $\varphi_1(0) = \psi(0)$.

Аналог задачи Трикоми, а также некоторые нелокальные задачи для класса уравнений смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка вида (1) ранее были исследованы в работах [1], [2]. В данной работе на примере аналога задачи Трикоми (1)-(3) обобщены полученные в работах [1], [2] результаты.

Литература

1. Салахитдинов М.С., Бердышев А.С. *О некоторых нелокальных краевых задачах для смешанного параболо-гиперболического уравнения* // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. науки. 1982, № 4. С. 25–31.

2. Салахитдинов М.С., Бердышев А.С. *Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. науки. 1983, № 4. С. 20–25.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕ

Баротов Б. Х.[1], **Кожанов А. И.**[1,2]

[1]Новосибирский государственный университет, Россия,
b.barotov@g.nsu.ru;
[2]Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,
kozhanov@math.nsc.ru

В докладе излагаются результаты о разрешимости краевых задач для квазигиперболических интегро-дифференциальных уравнений

$$h(t)D_t^4u(x,t)+Au(x,t)+c(x,t)u(x,t)-\int\limits_0^t R(t-\tau)(Bu)(x,\tau)d\tau=f(x,t),$$

в которых функция $h(t)\geq 0$, A и B есть либо тождественные операторы, либо линейные эллиптические по пространственным переменным операторы.

Для изучаемых задач получены теоремы существования и единственности регулярных решений-то есть решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ПОЛУОГРАНИЧЕННЫЙ СТЕРЖЕНЬ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ ПО МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА ЗАКОНА СУХОГО ТРЕНИЯ

Бегматов А.[1], **Маматова Н. Т.**[2]
[1,2]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент
[2]nigmamatova@yandex.ru

Рассмотрена задача о взаимодействии с внешней средой полуограниченного упругого стержня, подверженного динамической нагрузке. Полагается, что взаимодействие происходит согласно модели Винклера закона Кулона сухого трения. Согласно закону сухого трения направление силы трения зависит от знака скорости. При этом сечения стержня на которых скорость меняет знак неизвестны и подлежат определению. Сформулирована постановка задачи со свободной границей, описывающей напряженно-деформированное состояние стержня при наличии трения с внешней средой, когда сила трения пропорциональна деформации.

Приближенное решение сформулированной задачи со свободной границей получено методом интегральных соотношений. Произведены численные расчеты для случая экспоненциального динамического давления

$$\sigma(0,t) = \sigma^0 \exp\{-\alpha t\}, \quad \sigma^0 = const, \quad \alpha = const$$

и ступенчатой нагрузки ($\alpha \to 0$).

Поскольку, основной интерес представляют скорость перемещения u_1 и напряжение $\sigma(x,t)$ результаты расчетов приведены в виде графиков зависимости этих функций от времени. Произведен анализ численных результатов: на основе численных расчетов исследовано влияние трения на продолжительность процесса деформирования. Обращение скорости в нуль и переход в состояние покоя носит в основном упорядоченный характер (начинается в сечении $x = 0$ и завершается когда $x = at$). Однако, при значениях параметра α близких к нулю упорядочность нарушается. Например, при $\alpha = 0,01$ обращение скорости в нуль носит упорядоченный характер лишь до $x = 0,6at$, далее это происходит сначала на фронте волны и затем на сечениях прилегающих к фронту волны.

При $\alpha \to 0$ (ступенчатое нагружение) процесс перехода стержня в состояние покоя существенно отличается от экспоненциального.

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПО СЕМЕЙСТВУ ПАРАБОЛ В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Бегматов А. Х.[1], Исмоилов А. С.[2]

[1]Совместный Белорусско-Узбекский межотраслевой институт прикладных технических квалификаций, Ташкент, Узбекистан, akrambegmatov@mail.ru;

[2]Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан, alisher_8778@mail.ru

Интегральная геометрия представляет собой один из важнейших разделов теории некорректных задач математической физики и анализа. Актуальность задач интегральной геометрии обусловлена развитием томографических методов, представляющих повышенные требования к глубине применяемых результатов, тем обстоятельством, что к решению задач интегральной геометрии сводится ряд многомерных обратных задач для дифференциальных задач с частными производными, а также внутренними потребностями развития теории некорректных задач математической физики и анализа.

В работы М.М.Лаврентьева была предложена весьма плодотворная идея сведения широкого класса задач интегральной геометрии к исследованию уравнения эволюционного типа для некоторой вспомогательной функции. Это, в частности, позволило доказать теорему единственности решения исходной задачи. Следует отметить, что некоторые классы задачи интегральной геометрии Вольтерровского типа изучались также А.Л.Бухгеймом.

Новые классы задач интегральной геометрии получили свое развитие в работах Акр. Х. Бегматова и др. В его работах изучались задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости и в пространстве. В работах [1, 2] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью и изучена задача восстановления функции по семействам сфер в трехмерном пространстве.

В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в верхней полуплоскости с весовой функцией специального вида. Доказана теорема единственности решения уравнения и выведена формула обращения. Показано, что решение поставленной задачи слабо некорректно, то есть получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости.

Литература

1. Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S. Weakly ill-posed problems of integral geometry on the Plane. Uzbek Mathematical Journal, Volume 66, Issue 1, pp.64-75. 2022.

2. Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S., Khudayberdiev D.G. Weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane with perturbation. Journal of the Balkan Tribological Association, Vol. 29, №3, 273-289. 2023.

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Бободжанов А. А.[1], Калимбетов Б. Т.[2], Сафонов В. Ф.[1]
[1]НИУ, МЭИ, Москва, Российская Федерация,
bobojanova@mpei.ru; Singsaf@yandex.ru;
[2]Университет Дружбы народов имени А.Куатбекова, Шымкент, Казахстан,
bkalimbetov@mail.ru

В работе метод регуляризации С.А. Ломова [1] обобщается на задачи для интегро-дифференциального уравнения с быстроменяющимся ядром и с правой частью, зависящей от быстро осциллирующего показателя степени

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\mu(\theta)d\theta}K(t,s)y(s,\varepsilon)ds+\varepsilon f\left(y,t\right)+h(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}},y(0,\varepsilon)=y^0, \tag{1}$$

при выполнении следующих предположений:
1) $\mu(t),\beta'(t)\in \mathrm{C}^\infty([0,T],\mathbb{R}),\ K(t,s)\in \mathrm{C}^\infty(0\le s\le t\le T,\mathbb{R})$;
2) $\mu(t)<0,\beta'(t)>0\ \ \forall t\in[0,T]$;
3) $f(y,t)$ многочлен, т.е.

$$f(y,t)=\sum_{m=0}^{N}f_m(t)y^m$$

с коэффициентами $f_m(t)\in C^\infty\left([0,T],\mathbb{R}\right), m=\overline{0,N}, N<\infty$.

Работа является продолжением исследований, проведенных ранее для аналогичной линейной системы с быстро меняющимся ядром, но с правой частью, не зависящей от быстро осциллирующего экспонента. В нелинейном случае условия разрешимости соответствующих итерационных задач, как и в линейном случае, будут иметь вид не дифференциальных (как это имело место в задачах с ненулевым оператором дифференциальной части), а интегро-дифференциальных уравнений, причем в формировании этих уравнений играют роль нелинейность и быстро осциллирующая неоднородность.

Проводится регуляризация исходной задачи (1), доказывается асимптотическая сходимость интегрального оператора относительно пространства безрезонансных решений и однозначная разрешимость общеитерационных задач в классе непрерывных функций.

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981.

2. Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф. Асимптотический анализ сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем с нулевым оператором дифференциальной части // Дифферен. уравн., 47, (4), 2021. –С. 519Ц-536.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ ГАММЕРШТЕЙНА

Бободжанова М. А.[1]**, Калимбетов Б. Т.**[2]**, Сафонов В. Ф.**[1]

[1]НИУ, МЭИ, Москва, Российская Федерация,
bobojanova@mpei.ru; Singsaf@yandex.ru;
[2]Университет Дружбы народов имени А.Куатбекова, Шымкент, Казахстан,
bkalimbetov@mail.ru

Многие прикладные задачи приводят к нелинейным уравнениям Гаммерштейна вида

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\int\limits_0^1 K\left(t,s\right)f\left(s,y\left(s,\varepsilon\right)\right)ds,\ y\left(0,\varepsilon\right)=y^0.$$

В общем случае нельзя получить его решение в явном виде. Однако если $K\left(t,s\right)$ представляется в виде суммы произведений функций с разделенными переменными, то исследование этого уравнения можно свести к алгебраической системе уравнений. Не будем рассматривать общий случай, а покажем, как можно решить этот вопрос для сингулярно возмущенного уравнения вида

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\int\limits_0^1 a_1\left(t\right)b_1\left(s\right)f\left(y\left(s,\varepsilon\right),s\right)\ ds+\int\limits_0^1 a_2\left(t\right)b_2\left(s\right)f\left(y\left(s,\varepsilon\right),s\right)\ ds, y\left(0,\varepsilon\right)=y^0. \quad (1)$$

Здесь $f\left(y,s\right)$ – известная непрерывная нелинейная функция по y , $a_j\left(t\right),b_j\left(t\right)$ – известные непрерывные на отрезке $[0,1]$ функции, $y=y\left(t,\varepsilon\right)$ – неизвестная скалярная функция, $\varepsilon>0$– малый параметр (отрезок $[0,1]$ взят ради упрощения выкладок; вместо него можно взять любой отрезок $[0,T]$).

Отметим, что линейный вариант этой задачи:

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\int\limits_0^1 a_1\left(t\right)b_1\left(s\right)y\left(s,\varepsilon\right)\ ds+\int\limits_0^1 a_2\left(t\right)b_2\left(s\right)y\left(s,\varepsilon\right)\ ds++h\left(t\right),\ y\left(0,\varepsilon\right)=y^0$$

рассматривался в работе [1].

Приводятся необходимые и достаточное условие существования конечного предела решений задачи (1) при стремлении малого параметра к нулю и достаточные условия, при которых возможен предельный переход к решению вырожденного уравнения.

Литература

1. Смирнов Н.С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1951.

ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА

Бозоров Ж. Т.[1], Мирсабуров М.[2]
[1,2]Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан
[1]jorabek.bozorov.89@mail.ru [2]mirsaburov@mail.ru,

Пусть Ω -конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0(y = \sigma_0(x)) : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1, 0),\ B(1, 0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y}u_y\right) = 0. \tag{1}$$

Задача TBS^* : В области Ω требуется найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^3(\Omega)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^3(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

2) функция $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 [2] в области Ω^-;

3) на интервале вырождения выполняется условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x \in I \setminus \{c\},$$

причем эти пределы при $x = 1$ могут имет особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/(2(m + 2)) \in (0, 1/2)$, $I = (-1, 1)$;

4) выполнены условия

$$u(x, y)\,|_{\sigma_0} = f(x),\ x \in \overline{I},$$

$$u(x, y)\,|_{CN} = \varphi(y),$$

$$u(x, y)\,|_{AC_0} = \psi(x),\ x \in (-1, \frac{(c-1)}{2}),$$

$$u\left[\theta(x_0)\right] = \mu u\left[\theta^*(x_0)\right] + \rho(x),\ x \in (c, 1),$$

где $C = (0, -((m + 2)/2)^{2/(m+2)})$, $N = (0, ((m + 2)/2)^{2/(m+2)})$.

Задачи TBS^* исследуется методами работ [1], [2,с.110].

Литература

1. Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа, Сиб. матем. журн., 1961, том 2, номер 1, -С. 7–19.

2. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005 "Университет"-224 с.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Болтаев А. К.

Институт математики имени В.И. Романовского, АН РУз, Ташкент, Узбекистан; boltaevaziz55@gmail.com

Известно, что квадратурные формулы необходимы для численного вычисления определенных интегралов. Кроме того, квадратурные формулы обеспечивают основной и важный инструмент для численного решения дифференциальных и интегральных уравнений. Развитие новых алгоритмов построения оптимальных в некотором смысле квадратурных формул, а также оценка их погрешностей в различных классах функций на основе алгебраических и вариационных подходов – одна из важных задач вычислительной математики.

В связи с этим рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)\mathrm{dx} \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta), \tag{2}$$

где C_β – коэффициенты, $x_\beta (\in [0,1])$ – узлы формулы (1), $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Задача построения оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}$ это вычисление следующей величины:

$$\left\|\mathring{\ell}\right\|_{W_2^{(m,0)*}} = \inf_{C_\beta} \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}, \tag{3}$$

т. е. в нахождении минимум нормы функционала погрешности ℓ по коэффициентам C_β при фиксированных узлах x_β.

Эта задача состоит из двух частей: во-первых, вычисление нормы функционала погрешности (2) в пространстве $W_2^{(m,0)*}$, а затем нахождение минимума нормы (3) по коэффициентами C_β для фиксированных узлов x_β.

В данной работе мы решили первой части этой задачи. Имеет место

Теорема. Квадрат нормы функционала погрешности ℓ квадратурной формулы (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ определяется следующей формулой

$$\begin{aligned} \|\ell|W_2^{(m,0)*}\|^2 \;\; = \;\; (-1)^m \Bigg[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C[\beta]C[\gamma]G_m(x_\beta - x_\gamma) + \int_0^1\int_0^1 G_m(x-y)\mathrm{dxdy} \\ -2\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\int_0^1 G_m(x-x_\beta)\mathrm{dx}\Bigg]. \end{aligned}$$

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВЛАСОВА

Бондарь Л. Н.[1], Мингнаров С. Б.[2]

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
[1]l.bondar@g.nsu.ru, [2]s.mingnarov@g.nsu.ru

Рассмотрим задачу Коши для псевдогиперболической системы:

$$\begin{pmatrix} I-D_x^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & I-D_x^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I-D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 U + \sigma^2 D_x^4 U = F(t,x), \quad t>0,\, x\in R, \tag{1}$$

$$U|_{t=0}=0, \quad D_t U|_{t=0}=0,$$

где $\sigma \neq 0$, $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=1$.
Система (1) возникает при моделировании изгибно-крутильных колебаний упругого стержня [1]. Она является не разрешенной относительно старшей производной по времени и относится к классу псевдогиперболических систем, введенному в монографии [2]. В [2] исследована разрешимость задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений в соболевских пространсвах. Для псевдогиперболических систем не существует общей теории разрешимости задачи Коши, есть лишь результаты для конкретных систем.

В работе получены следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть вектор-функция $F(t,x) = (f^1(t,x), f^2(t,x), f^3(t,x))^T \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)$, $\gamma>0$, такая, что $(1+x^2)F(t,x)\in L_{2,\gamma}(R_+; L_1(R))$ и выполнены условия:

$$\varepsilon_1 \int\limits_R f^1(t,x)\,dx - \varepsilon_2 \int\limits_R f^2(t,x)\,dx - \int\limits_R f^3(t,x)\,dx = 0, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_1 \int\limits_R x f^1(t,x)\,dx - \varepsilon_2 \int\limits_R x f^2(t,x)\,dx - \int\limits_R x f^3(t,x)\,dx = 0, \quad t>0. \tag{2.2}$$

Тогда задача Коши (1) имеет единственное решение $U(t,x)$ в пространстве вектор-функций $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2), \gamma>0$, таких, что $D_t^2 D_x^2 U \in L_{2,\gamma}(R_+^2)$.

Теорема 2. Пусть $F(t,x) = (f^1(t,x), f^2(t,x), f^3(t,x))^T \in C_0^\infty(R_+^2)$. Тогда для разрешимости задачи Коши (1) в $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$, $\gamma>0$, необходимо выполнение условий (2.1), (2.2).

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение №075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Литература

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Москва: Физматгиз, 1959.

2. Демиденко Г.В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

СТАРЫЕ И НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Бурский В. П.[1]

[1] Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия, bvp30@mail.ru

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, D) = \sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha(x) D^\alpha-$ дифференциальная операция общего вида, где $a_\alpha \in C^\infty(\bar\Omega)-$ комплекснозначные функции, $D^\alpha = \frac{(-i\partial)^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$, и пусть $\Omega-$ произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Операция $\mathcal{L}$ порождает формально сопряженную операцию $\mathcal{L}^+ \cdot = \sum_{|\alpha|\le l} D^\alpha(a^*_\alpha(x)\ \cdot)$, где $a^*_\alpha(x)-$ комплексно-сопряженная функция.

Минимальный оператор L_0, определяемый как замыкание оператора $\mathcal{L}$, первоначально заданного на $C_0^\infty(\Omega)$, в норме графика $\|u\|^2_L = \|u\|^2_H + \|\mathcal{L}u\|^2_H$ порождает **максимальный оператор** $L = (L_0)^*$ с помощью сопряжения * в гильбертовом пространстве $H := L_2(\Omega)$. Аналогично для L_0^+ и L^+. Области определения $D(L_0)$, $D(L)$ этих операторов являются гильбертовыми пространствами в норме графика. Введем **граничное пространство** $C(L) = D(L)/D(L_0)$ для оператора L, а также фактор-отображение $\Gamma : D(L) \to C(L)$. При этом общая **однородная линейная граничная задача** по Хчрмандеру задается некоторым линейным подпространством $B \subset C(L)$ и записывается как $Lu = f \in H;\ \Gamma u \in B$. Граничная задача называется **корректной**, если оператор $L_B : D(L_B) \to H,\ D(L_B) := \Gamma^{-1}B$ имеет непрерывный обратный.

Для максимального оператора L мы имеем короткую точную последовательность $0 \to \ker L \to D(L) \to \operatorname{Im} L \to 0$. Имеется похожая последовательность для минимального оператора и точные последовательности факторизации $D(L)/D(L_0) = C(L)$ и $\operatorname{Im} L/\operatorname{Im} L_0$. Рассмотрим условия Вишика для непрерывных левых обратных:

$\exists L_0^{-1} : H \to D(L_0),\ L_0^{-1}L_0 = id_{D(L_0)};\quad \exists (L_0^+)^{-1} : H \to D(L_0^+),\ (L^+)_0^{-1}L_0^+ = id_{D(L_0^+)}$, которые справедливы для широких классов операторов, в частности, для операторов с постоянными коэффициентами. Собрав это вместе, получим коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & D(L_0) & \xrightarrow{L_0} & \operatorname{Im} L_0 & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_{\operatorname{Im}} & & \\
0 & \to & \ker L & \xrightarrow{i_L} & D(L) & \xrightarrow{L} & H & \to & 0\\
 & & \downarrow \Gamma_{\ker} & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \Gamma_{\operatorname{Im}} & & \\
0 & \to & C(\ker L) & \xrightarrow{i_C} & C(L) & \xrightarrow{L_C} & \ker L^+ & \to & 0
\end{array} \qquad \text{(D)}$$

где операторы i_C и L_C определены формулами, замыкающими диаграмму до коммутативной. Эта диаграмма означает, что максимальный оператор раскладывается в прямую сумму $L = L_0 \oplus L_C$ своей внутренней части L_0 и граничной части L_C. Заметим, что все, что связано с граничной задачей, относится только лишь к граничному пространству. И для того, чтобы от общей постановки перейти к оператору L_C, необходимо уметь раскладывать $H = \operatorname{Im} L_0 \oplus \ker L^+$. Это достигается рассмотрением тройки оснащенных пространств $D(L_0) \subset H \subset D'(L_0)$, где пространство $D'(L_0)$ строится как сопряженное к $D(L_0)$ в топологии H. А именно, решаем обобщенную задачу Дирихле для уравнения $\mathcal{L}^+\mathcal{L}v = \mathcal{L}^+f \in D'(L_0),\ v \in D(L_0)$, которая имеет единственное решение ввиду условий Вишика, и, наконец, $w = f - L_0 v \in \ker L^+$.

СОСТАВЛЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ КАСКАДНЫХ МОДЕЛЕЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ МЕТОДАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Водинчар Г. М., Лисюткин С. С., Фещенко Л. К.

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Камчатский край, Россия

gvodinchar@ikir.ru

При построении каскадных моделей (shell models) турбулентных систем пространство волновых векторов $\mathbf{k}$ разбивается на расширяющиеся в геометрической прогрессии оболочки $K_n = \{\mathbf{k} \mid q^n \leq \|\mathbf{k}\| < q^{n+1}\}$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $q > 1$ [1]. Для турбулентной магнитогидродинамической (МГД) конвекции поля температуры, скорости и магнитной индукции описываются соответственно переменными $T_n(t)$, $U_n(t)$, $B_n(t)$ (коллективными переменными), абсолютные значения которых интерпретируются как меры пульсаций соответствующего поля в диапазонах масштабов с волновыми числами из $[q^n; q^{n+1})$.

Каскадная модель – это система квадратично-нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для коллективных переменных, которые качественно подобны уравнениям МГД-конвекции в пространстве Фурье [1,2]. В нелокальных моделях допускается нелинейное взаимодействие несмежных масштабных оболочек. Построение конкретной каскадной модели связано с нахождением таких значений коэффициентов при квадратичных членах уравнений, при которых система будет обладать набором некоторых квадратичных инвариантов. Сами эти инварианты являются аналогами законов сохранения в идеальной МГД-конвекции. Речь при этом идет о *точных формульных выражениях* для коэффициентов и *точных инвариантах*. В случае нелокальных моделей вывод этих выражений требует громоздких алгебраических преобразований и точного решения систем линейных уравнений с неопределенными коэффициентами. Однако процесс вывода можно автоматизировать с помощью методов и систем компьютерной алгебры.

В докладе представлено математическое описание разработанной технологии автоматизированного расчета выражений для коэффициентов, которая позволяет генерировать параметрические классы каскадных моделей МГД-конвекции с нужными инвариантами. Она реализована в пакете Maple и символьной библиотеке SymPy. Представленные результаты развивают и обобщают подходы, опубликованные в [3] для каскадных моделей с вещественными коллективными переменными.

Работа выполнена за счет Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. номер темы 124012300245-2).

Литература

1. Ditlevsen P. Turbulence and Shell Models. Cambridge: Univ. Press, 2011.

2. Plunian F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence // Physics Reports. 2013. Vol.523. pp. 1–60.

3. Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. Автоматизированная генерация каскадных моделей турбулентности методами компьютерной алгебры. Вычислительные технологии. 2021. Т.26. №5. С. 65–80.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

Газиев К. С.

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
ksgaziev1965@gmail.com

В односвязной области $D \subset R^2$, ограниченной гладким жордановым контуром Γ рассмотрим уравнение

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_{xx}+u_{yy})+c(x,y)u(x,y)=0, \tag{1}$$

где $\alpha, \beta = const$, причем $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

Считаем, что Γ обладает следующими свойствами:

а) характеристики $\beta x-\alpha y=l$, где $-\infty<l_1<l<l_2<+\infty$ пересекают контур Γ в двух точках, причем эти характеристики не касаются Γ; характеристики $\beta x-\alpha y=l_1$ и $\beta x-\alpha y=l_2$ имеют с контуром Γ единственные общие точки (касания) - $N_1(x_1,y_1)$ и $N_2(x_2,y_2)$ соответственно, а характеристики $\beta x-\alpha y=l$ при $l<l_1$ и $l>l_2$ общих точек с Γ не имеют.

б) функции $x=x(s)$, $y=y(s)$ определяющие параметрическое уравнение кривой Γ, непрерывны вместе со своими производными до второго порядка включительно, причем $x'^2(s)+y'^2(s)\neq 0$.

Через Γ_1 обозначим ту часть Γ которая получается при движении от точки N_1 к точке N_2 в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки), а через $\Gamma_2=\Gamma\backslash\Gamma_1$

Задача N. Найти решение $u(x,y)\in C^4(D)\bigcap C^2(\bar{D})$ уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,y)=f_1(x,y), \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial n^2}=f_2(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma \tag{2}$$

здесь $f_1(x,y), f_2(x,y), c(x,y)$ - заданные функции, n-внешняя нормаль к Γ.

Отметим, что различные краевые задачи для уравнения (1) при $\beta=0$ были изучен в работе [1] и при $\beta\neq 0$, $c(x,y)=0$ рассмотрено в работе [2].

Доказано теорема единственности методом интегралов энергии, а существования решения доказывается с использованием методов интегральных уравнении.

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно составного типов. – Ташкент: Фан, 1979.

2. Газиев К.С. Задача Дирихле для уравнения четвертого порядка составного типа //ДАН РУ. 1995. №11-12. С. 4–7.

ОПТИМАЛЬНЫЙ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Гуломов О. Х.

Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;

Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства" Ташкент, Узбекистан

otabek10@mail.ru

Рассмотрим составную квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)\,dx \cong \sum_{n=0}^{m-1} C^{(n)}[\beta]\,\varphi^{(n)}(h\beta)$$

Здесь $\varphi(x) \in L_2^{(m)}(0,1)$ $L_2^{(m)}(0,1)$ – гильбертово пространство классов вещественных функций $\varphi(x)$, отличающихся самое большее на полином $m-1$ с производными (в смысле обобщенных функций) порядка m, квадратично интегрируемыми в интервале $(0,1)$, $h=\frac{1}{N}$, $N=2,3,....$

Вычисление интеграла

$$I = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Или его многомерного аналога играет важную роль вычислительной математике. Хорошо известно, что численный счет таких интегралов наталкивается на определение трудности при больших значениях ω из-за того, что подинтегральная функция сильно осциллирует.

Вычисление интеграла (1) часто выполняется методом Файлона. Метод Файлона напоминает квадратурную формулу Симпсона. Однако в то время, как в методе Симпсона вся подинтегральная функция заменяется параболой, в методе Файлона параболой заменяется только функция $\varphi(x)$. Таким путчм Файлон получил квадратурную формулу с коэффициентами, зависящими от ω.

В настоящей работе мы построим в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ одной из составных квадратурных формул вида (1).

Справедлива следующая теорема.

Теорема. В пространстве Соболева при $\omega = nN$, $n=1,2,...,$ $N=2,3,...,$ следующая квадратурная формула

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)\,dx \cong \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi i\omega)^{n+1}}\left(\varphi^{(n)}(0)-\varphi^{(n)}(1)\right)$$

является оптимальной квадратурной формулой.

Литература

1. Filon L.N.G. On a quadrature formula for trigonomrtric integrals. Proc. Roy. Soc. Edinb. 1928, 49, 38-47.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Давлатова Ф. И.

Институт Математики имени В.И.Романовского АН РУз., Ташкент;
e-mail:fotimadavlatova733@gmail.com

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx \cong \sum_{\alpha=0}^{2}\sum_{\beta=0}^{N} d_{\omega,\alpha}\left[\beta\right]\varphi^{(\alpha)}\left(h\beta\right), \tag{1}$$

здесь $d_{\omega,\alpha}\left[\beta\right]$ – коэффициенты, $[\beta]=(h\beta)$, $h=1/N$, $N=1,2,3,...$, $\varphi(x)$–элемент пространства $L_2^{(3)}(0,1)$, $i^2=-1$, ω – произвольно действительное число. Погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$\left(\ell_\omega^N,\varphi\right)=\int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx-\sum_{\alpha=0}^{2}\sum_{\beta=0}^{N} d_{\omega,\alpha}\left[\beta\right]\varphi^{(\alpha)}(h\beta),$$

где $\ell_\omega^N(x)$ является функционалом погрешности и имеет вид

$$\ell_\omega^N\left(x\right)=e^{2\pi i\omega x}\chi_{[0,1]}(x)-\sum_{\alpha=0}^{2}\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^\alpha d_{\omega,\alpha}[\beta]\,\delta^{(\alpha)}(x-h\beta), \tag{2}$$

здесь $\chi_{[0,1]}(x)$ – характеристическая функция отрезка [0,1], $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Поскольку функционал $\ell_\omega^N(x)$ вида (2) определен на пространству $L_2^{(3)*}(0,1)$, то на этот функционал налагается следующие условия $\left(\ell_\omega^N,x^\alpha\right)=0,\quad \alpha=0,1,2.$

Задача построения оптимальных квадратурных формул вида (1) с функционалом погрешности (2) в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$ это вычисление следующей величины:

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}{}_\omega^N\,|L_2^{(3)*}(0,1)\right\|=\inf_{d_{\omega,\alpha}[\beta]}\sup_{\|\varphi\|\neq 0}\frac{\left|\left(\ell_\omega^N,\varphi\right)\right|}{\left\|\varphi|\,L_2^{(3)}(0,1)\right\|}.$$

Это задача состоит из двух частей: сначала мы должны вычислить норму $\left\|\ell_\omega^N|L_2^{(3)*}(0,1)\right\|$ функционала погрешности, а потом минимизировать его по коэффициентам $d_{\omega,\alpha}\left[\beta\right]$.

В настоящей работе минимизируя норму $\left\|\ell_\omega^N(x)\right\|$ функционала погрешности по коэффициентам $d_{\omega,0}\left[\beta\right]$ и $d_{\omega,1}\left[\beta\right]$, $d_{\omega,2}\left[\beta\right]$ получена система для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурной формулы (1).

Литература

1. A.R.Hayotov, S. Jeon, Chang-Ock Lee, On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space // Journal of Computational and Applied Mathematics 372 (2020) 112713.

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Демиденко Г. В.[1], Ганжаева М. Ш.[2]

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
[1]demidenk@math.nsc.ru; [2]m.ganzhaeva@g.nsu.ru

Рассматривается задача о нахождении ограниченных решений системы разностных уравнений с периодическими коэффициентами

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

$$\sup_{n \in Z_+} \|x_n\| < \infty. \tag{2}$$

Предполагается, что последовательность $\{f_n\}$ ограничена, и для спектра матрицы монодромии системы (1) имеет место дихотомия относительно единичной окружности $\{\lambda \in C : \ |\lambda| = 1$ (см., например, [1, 2]).

В работе установлены необходимые и достаточные условия на начальный вектор

$$x_0 = b, \tag{3}$$

при которых задача (1)–(3) однозначно разрешима. Используя критерии устойчивости и экспоненциальной дихотомии для разностных уравнений с периодическими коэффициентами, установленные в [3, 4], получены оценки решений.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение №075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Литература

1. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

2. Демиденко Г.В. Матричные уравнения. Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2009.

3. Demidenko G.V. Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // J. Comput. Math. Optim. 2010. V. 6, №. 1, P. 1-12.

4. Демиденко Г.В., Бондарь А.А. Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, №. 6. С. 1240–1254.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА-РЭЛЕЯ-БИШОПА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦЕНТАМИ

Демиденко Г. В.[1], Нурмахматов В. С.[2]

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
[1]g.demidenko@g.nsu.ru; [2]v.s.nurmuhammad@gmail.com

В работе устанавливается энергетическая оценка для одного уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами:

$$L(x, D_t, D_x)v = \big(aI + \sum_{|\beta|=2} \alpha^0_\beta(x) D^\beta_x\big) D^2_t v + \sum_{|\beta|=4} \alpha^2_\beta(x) D^\beta_x v = f(t, x), \qquad (1)$$

где $\sum\limits_{|\beta|=2} \alpha^0_\beta(x) D^\beta_x$ — эллиптический дифференциальный оператор, коэффициенты $\alpha^k_\beta(x), k = 0, 1, 2$, достаточны гладкие и постоянные вне некоторого шара $|x| \leq r$. Уравнение (1) относится к классу псевдогиперболических уравнений, введенных в монографии [1]. В литературе такие уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, часто называют *уравнениями типа Соболева* [2].

Уравнение (1) называется уравнением *Власова-Рэлея-Бишопа* [3, 4]. Оно возникает при изучении волноводов и теории упругости. Задача Коши и краевые задачи для уравнения *Власова-Рэлея-Бишопа* хорошо изучены в пространствах Соболева с экспоненциальным весом [5].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-21-00370.

Литература

1. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

2. Соболев С.Л. Избранные труды. Т. 1, Т. 2. Новосибирск: филиал "Гео" Издат. Сиб. отд. РАН, 2003; 2006.

3. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. Москва-Ленинград: Стройиздат, 1940.

4. Bishop R.E.D. Longitudinal waves in beams // Aeronautical Quarterly. 1952. V. 3, №. 4, P. 280–293.

5. Demidenko G.V. Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations // Sib. Math. Journal. 2015. V. 56, No. 6. P. 1028–1041.

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО И ВЫСОКОГО ПОРЯДКОВ

Джамалов С.З.

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан, siroj63@mail.ru

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными условиями и обратными задачами. Отметим, что интерес к исследованию обратных задач для уравнений математической физики обусловлен важностью их приложений в различных разделах механики, сейсмологии, медицинской томографии и геофизики [1,2]. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов [3,4]. В работах [5,6] изучены обратные задачи для модельных уравнений смешанного типа в плоскости. В работе [7] предложены и изучены корректности некоторые линейные обратные задачи (связанные с поиском решения уравнения и элемента правой части) для многомерных уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода в пространствах Соболева.

Как нам известно нелинейные обратные задачи (связанные с поиском решения, коэффициента и элемента правой части уравнения) для уравнения смешанного типа второго порядка, линейные и нелинейные обратные задачи для уравнения смешанного типа высокого порядка в ограниченных и неограниченных областях практически не исследованы. С этой целью в данной работе предлагаются новые методы, для исследования корректности обратных задач для уравнения смешанного типа высокого порядка, которые позволяют доказать однозначные разрешимости некоторых линейных и нелинейных обратных задач для уравнения смешанного типа второго и высокого порядков.

Работы выполнены при финансовой поддержке научного гранта Министерстве инновации Республики Узбекистан (номер гранта. Ф-ФА-2021-424).

Литература

1. Лаврентьев М.М, Романов В.Г, Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. –Новосибирск. Наука, 1969.

2. Аниканов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. –Новосибирск: Наука, 1978. 120 с.

3. Бубнов. Б. А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических и гиперболических уравнений. –Новосибирск. 1987. Препринт №713, ВЦ.СО АН СССР. 84 с.

4. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, №4. С.694-716.

5. Megrabov A.G. Forward and inverse problems for hyperbolic, elliptic and mixed type equations. Vtrecht; Boston: VSP, 2003.

6. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа. // Изв. вузов. Математика. 2011. №2. –С.71–85.

7. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. –Ташкент. 2021. 176 с.

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Джамалов С. З.[1], Халхаджаев Б. Б.[2]

[1,2]Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
e-mail:siroj63@mail.ru[1]; xalxadjaev@yandex.ru[2]

В данной работе, предлагается новый метод для исследования однозначной разрешимости обратной задачи для уравнения смешанного типа второго рода, четвертого порядка в трехмерном параллелепипеде. В области

$$G = (0,1)\times(0,T)\times(0,\ell) = Q\times(0,\ell) = \{(x,t); 0<x<1;\ 0<y<\ell; 0<t<T<+\infty\}$$

рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода четвертого порядка

$$Lu = Pu - Mu + Nu = \psi(x,t,y). \tag{1}$$

Здесь $Pu = \sum_{i=0}^{4} K_i(x,t) D_t^i u$; $Mu = au_{xxxx} + bu_{xxtt} - cu_{xx}$; $Nu = u_{yyyy}$, где $K_4(x,t) = K_4(t)$, $K_4(0) = K_4(T) = 0$; $a, b, c - const > 0$, $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ $(i = 0,1,2,3,4)$, $D_t^0 u = u$. Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K_4(t)$ по переменной t внутри отрезка $[0,T]$ не налагается никаких ограничений.

В дальнейшем будем предполагать, что $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t)\cdot f(x,t,y)$, где $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ – заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x,t,y), h(x,t)\}$, удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p\, u|_{t=0} = D_t^p\, u|_{t=T};\ \ p = 0,1,2 \tag{2}$$

$$D_x^q\, u|_{x=0} = D_x^q\, u|_{x=1}; \tag{3}$$

$$D_y^q\, u|_{y=0} = D_y^q\, u|_{y=\ell};\ \ q = 0,1,2,3 \tag{4}$$

и дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0(x,t),\ \text{где } 0<\ell_0<\ell<+\infty \tag{5}$$

и вместе с функцией $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U = \{(u,h)|\ u\in W_2^{4,3}(G); h\in W_2^4(Q)\}.$$

Здесь $W_2^{4,3}(G)$ анизотропные пространства Соболева с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{4,3}(G)} = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{k=1}^{\infty}(1+\mu_k^4)^3\,\|u_k(x,t)\|^2_{W_2^4(Q)}, \tag{6}$$

где через $W_2^4(Q)$ обозначено пространства Соболева.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

Джанзакова Ж. Б.[1], Турметов Б. Х.[2]

Университет Ахмета Ясауи, Туркестан, Казахстан,
[1]zhainar.janzakova@ayu.edu.kz; [2]batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Для любого $x \in R^n$ рассмотрим отображения $S_i x = (x_1, ..., x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$, $1 \leq j \leq n$. Если i некоторый индекс, то вместе с обычной записью мы будем использовать его представление в двоичной системе исчислении:$i = (i_n ... i_2 i_1)_2 \equiv i_n \cdot 2^{n-1} + ... + i_2 \cdot 2^1 + i_1 \cdot 2^0$. Используя эту запись, мы можем рассмотреть отображения вида $S_n^{i_n} ... S_2^{i_2} S_1^{i_1} x$, где $i_k = 0$ или $i_k = 1$. Общее количество таких отображений равняется 2^n.

Введем оператор

$$L_n u(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \left(-\Delta\right) u \left(S_n^{i_n} ... S_2^{i_2} S_1^{i_1} x\right),$$

где $a_i, i = 0, 1, ..., 2^n - 1$ некоторый набор действительных чисел, Δ оператор Лапласа.

В настоящей работе для нелокального аналога уравнения Пуассона $L_n u(x) = f(x)$ в единичном шаре изучены новые классы краевых задач. В рассматриваемых задачах граничные условия заданы в виде связи значении искомой функции в верхней полусфере со значением в нижней полусфере. Исследуемые задачи обобщают известные периодические и антипериодические краевые задачи для круговых областей. Задачи решаются сведением их к двум вспомогательным задачам с краевыми условиями Дирихле и Неймана для нелокального аналога уравнения Пуассона. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения основных задач. Найдены точные условия разрешимости исследуемых задач, а также получены интегральные представления решений. Изучены также спектральные вопросы, связанные с периодическими задачами. Найдены собственные функции и собственные значения этих задач. Доказаны теоремы о полноте системы собственных функций в пространстве L_2.

Отметим, что аналогичные задачи в случае классического уравнения Пуассона изучены в работах [1,2].

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования Комитета науки МНВО РК (грант №AP23488086).

Литература

1. Sadybekov M.A., Turmetov B. Kh. On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball // Eurasian Mathematical Journal. 2012. Vol.3, №1. P.143–146.

2. Садыбеков М.А., Турметов Б.Х. Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. №2. С. 264–268.

ОБРАТНЫЕ ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛАУРИЧЕЛЛА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Джураев Н.

Каршинский инженерно-экономический институт, Карши, Узбекистан;
norqul.djurayev@mail.ru

Прямые и обратные разложения для гипергеометрических функций Лауричелла играют важную роль при нахождении явных решений краевых задач для многомерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{2\alpha_j}{x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}=0,\ \ m\geq 2,\ \ m\geq n\geq 1$$

в конечных и бесконечных областях.

Рассмотрим гипергеометрические функции Лауричелла

$$F_A^{(n)}\left(a,\mathbf{b};\,\mathbf{c};\,\mathbf{x}\right)=\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty}(a)_{|\mathbf{k}|}\prod_{i=1}^{n}\frac{(b_i)_{k_i}}{(c_i)_{k_i}}\frac{{x_i}^{k_i}}{k_i!},\qquad \sum_{i=1}^{n}|x_i|<1,$$

$$F_B^{(n)}\left(\mathbf{a},\mathbf{b};\,c;\,\mathbf{x}\right)=\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty}\frac{1}{(c)_{|\mathbf{k}|}}\prod_{i=1}^{n}(a_i)_{k_i}(b_i)_{k_i}\frac{{x_i}^{k_i}}{k_i!},\quad \max\{|x_1|,...,|x_n|\}<1,$$

где $\mathbf{b}:=(b_1,...,b_n)$, $\mathbf{c}:=(c_1,...,c_n)$, $\mathbf{x}:=(x_1,...,x_n)$, $|\mathbf{k}|:=k_1+...+k_n$, $k_1\geq 0,...,k_n\geq 0$.

Теорема об обратном разложении. Для гипергеометрических функций Лауричелла справедливы следующие формулы обратного разложения при $n=1,2,...$

$$\prod_{k=1}^{n}F\left(a,b_k;c_k;x_k\right)=\sum_{|\mathbf{m}_n|=0}^{\infty}\frac{(-1)^{A(n)}(a)_{A(n)}}{M_n!}\prod_{k=1}^{n}\frac{(b_k)_{B(k)}}{(c_k)_{B(k)}}x_k^{B(k)}\times$$

$$\times F_A^{(n)}\left(a+A(n),\ b_1+B(1),...,b_n+B(n);\ c_1+B(1),...,c_n+B(n);\ \mathbf{x}\right),$$

$$\prod_{k=1}^{n}F\left(a,b_k;c_k;x_k\right)=\sum_{|\mathbf{m}_n|=0}^{\infty}\frac{1}{(c)_{2A(n)}\,M_n!}\prod_{k=1}^{n}\frac{(a_k)_{B(k)}\,(b_k)_{B(k)}}{(c)_{A(k)}}x_k^{B(k)}\times$$

$$\times F_B^{(n)}\left(a_1+B(1),...,a_n+B(n),\ b_1+B(1),...,b_n+B(n);\ c+2A(n);\ \mathbf{x}\right),$$

где $F\left(a,b;c;z\right)$ – известная гипергеометрическая функция Гаусса, а $A(k)$, $B(k)$, $|\mathbf{m}_n|$, $M_n!$ определены в [1].

Теорема доказывается методом математической индукции.

В данном сообщении приводится пример на приложения доказанной теоремы.

Литература

1. Hasanov A., Ergashev T.G., New decomposition formulas associated with the Lauricella multivariable hypergeometric functions//Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics, 2021, 3(3), p. 317–326.

О ПОЛНОТЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ В КЛАССАХ КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Дуйсенбаев Р.С.

Ташкентский государственный технический университет им. Ислама Каримова, Ташкент, Узбекистан,
ruslanduysenbaev760@gmail.com

Многие вопросы о разложении функции вещественного или комплексного переменного в ряды по заданной системе функций (вопрос о базисах), сводится к некоторым вопросам теории интерполирования целыми функциями. Такими же, способами была решена задача А.Г. Костюченко (смотрите в книге [1], страница 49), который доказана полнота система функций $\{e^{ant}sinnt\}_{n=1}^{\infty}$ в классах квадратично суммируемых функций $L_2(0,\pi)$.

Определение. Система $\{x_n\}$ элементов банахова пространства E называется полной, если любой элемент $x \in E$ можно приблизить по норме линейными конечными комбинациями элементов $\{x_n\}$, то есть

$$\| x - \sum c_n^{(\varepsilon)} x_n \| < \varepsilon.$$

Если полноты нет, то замкнутая линейная оболочка множества $\{x_n\}$, есть собственное подпространства $L \subset E$ и по теореме Хана-Банаха можно определить функционал не тождественно равный нулю и такой, что $f(x_n) = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$. Наличие такого функционала есть необходимое и достаточное условие неполноты. Справедлива следующая

Теорема 1. *Система функций* $\{e^{anx+bmy}sinnxsinmy\}_{n=1,m=1}^{\infty,\infty}$ *полна в классах квадратично суммируемых функций* $L_2(0,\pi)\times(0,\pi)$.

Теорема 2. *Система функций*

$$\{e^{a_1n_1x_1+a_2n_2x_2+\ldots+a_Nn_Nx_N} \times sinn_1x_1 \times sinn_2x_2 \times \ldots \times sinn_Nx_N\}_{n_1=1,n_2=1,\ldots,n_N=1}^{\infty,\infty,\ldots,\infty}$$

полна в классах квадратично суммируемых функций $L_2((0,\pi)\times(0,\pi)\times\ldots\times(0,\pi))$.

Теорема 3. *Система функций*

$$\{e^{a_1n_1x_1+a_2n_2x_2+\ldots+a_Nn_Nx_N} \times sinn_1x_1 \times sinn_2x_2 \times \ldots \times sinn_Nx_N\}_{n_1=1,n_2=1,\ldots,n_N=1}^{\infty,\infty,\ldots,\infty}$$

полна в пространствах Соболева $\dot{W}_2^l((0,\pi)\times(0,\pi)\times\ldots\times(0,\pi))$.

Теорема 4. *Система функций*

$$\{e^{a_1n_1x_1+a_2n_2x_2+\ldots+a_Nn_Nx_N} \times sinn_1x_1 \times sinn_2x_2 \times \ldots \times sinn_Nx_N\}_{n_1=1,n_2=1,\ldots,n_N=1}^{\infty,\infty,\ldots,\infty}$$

полна в пространствах Соболева $\dot{H}_2^s((0,\pi)\times(0,\pi)\times\ldots\times(0,\pi))$.

Литература

1. Б.Я. Левин, Целые функций, Москва, Изд-во 2-е, стереотип. - М.: ЛЕНАНД, 2023.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЯДРА В ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИИ БАЛКИ

Дурдиев У. Д.

Бухарское государственный университет, Бухара, Узбекистан,
umidjan93@list.ru

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение колебания балки

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = \int\limits_0^t k(\tau) u(x, t-\tau) d\tau \tag{1}$$

в области

$$D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t \le T\},$$

где l – длина балки, T – конечное время, с начальными

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,l] \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

В прямой задаче требуется определить функцию

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{2,1}_{x,t}(\bar{D}), \tag{4}$$

удовлетворяющую соотношениям (1)–(4), при заданных чисел a, l, T и достаточно гладких функций $k(t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Обратная задача заключается в определении неизвестного ядра $k(t)$, $t > 0$, если относительно решения прямой задачи (1)–(4) известно дополнительное условие

$$u(x_0, t) = g(t), \quad x_0 \in (0,l), \quad t \in [0,T],$$

где $g(t)$–достаточно гладкая функция.

В этой работе рассматривается задача об определении ядра, которое представляет память среды в интегро-дифференциальном уравнении вынужденных колебаний балки. Задача сводятся к интегральным уравнениям второго рода вольтерровского типа относительно решения прямой задачи и неизвестного ядра обратной задачи. К этим уравнениям применяется метод сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций с экспоненциальной весовой нормой. Установлены глобальная разрешимость рассматриваемой обратной задачи и оценка условной устойчивости решения.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самаркий А.А. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1966.

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЯМИ ИОНКИНА-САМАРСКОГО ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Дюжева А. В.

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия,
aduzheva@rambler.ru;

В работах Н.И. Ионкин [1], [2] была предложена и изучена новая нелокальная задача для уравнения теплопроводности (см. также [3]). В дальнейшем было показано, что подобные задачи возникают во многих задачах математического моделирования, и что разрешимость задач с нелокальными условиями Н.И. Ионкина имеет место и для параболических уравнений высокого порядка, для гиперболических уравнений, для уравнений смешанного типа. Менее изученными представляются нелокальные задачи с условиями Н.И. Ионкина для эллиптических уравнений.

Пусть $x \in (0,1)$, $y = (y_1, .., y_n)$ есть точка ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, Q есть цилиндр $(0,1)\times\Omega$, $S = (0,1)\times\partial\Gamma$ есть боковая граница Q. Пусть $\gamma(y)$ - заданные функции, определенные при $x \in [0,1]$, $y \in \overline{\Omega}$, Δ_y - оператор Лапласа по переменным y_1,..,y_n.

Постановка задач: найти числа λ и γ, для которых задача

$$u_{xx} + \Delta_y u = \lambda u, \quad (x,y) \in Q$$

$$u(x,y)\big|_S = 0,$$

$$u(0,y) = \gamma u(1,y), \quad u_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega$$

имеет нетривиальное решение $u(x,y)$, принадлежащие пространству $W_2^2(Q)$.

Теорема. *Действительное число λ будет собственным числом спектральной задачи, если выполняется одно из условий*

1)$\lambda \leq \beta_1$, $\gamma = \cos\sqrt{\beta_k - \lambda}$ для некоторого натурального числа k такого, что $1 \leq k \leq k_0(\lambda)$;

2)$\lambda \leq \beta_1$, $\gamma = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{\lambda-\beta_k}} + e^{-\sqrt{\lambda-\beta_k}})$ для некоторого натурального числа k такого, что $k \geq k_0(\lambda) + 1$;

3) $\lambda > \beta_1$, $\gamma = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{\lambda-\beta_k}} - e^{-\sqrt{\lambda-\beta_k}})$ для некоторого натурального числа k.

Литература

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием// Дифференц. уравнения. 1977. Т.13. №2. –С.294–304.

2. Ионкин Н.И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием// Дифференц. уравнения. 1979. Т15. №7. –С.1279–1283.

3. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. 1980. Т.16. №11. – С.1925–1935.

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Евсеев Ф. А.

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия
fedor_evseev@rambler.ru;

Рассмотрим систему квазигидродинамических уравнений в приближении мелкой воды:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + div\,(h\vec{u}) = div\,(h\vec{w}),\ \vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + g\nabla h),$$

$$\frac{\partial(h\vec{u})}{\partial t} + div\,(h\vec{u}\otimes\vec{u}) + g\nabla(\frac{h^2}{2}) = 2div\,(\nu h\hat{\sigma}(\vec{u})) + div\,(h\vec{w}\otimes\vec{u} + h\vec{u}\otimes\vec{w}), \qquad (1)$$

$$(t,x)\in Q = (0,T)\times G,\ G\subset\mathbb{R}^2.$$

- где тензор скоростей деформации $\hat{\sigma}$ имеет форму:

$$\hat{\sigma}(\vec{u}) = \hat{\sigma} = \frac{1}{2}[(\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T],\ \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ix_j} + u_{jx_i}),$$

G – ограниченная область с границей $\Gamma\in C^2$, коэффициент кинематической вязкости жидкости ν, характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константам. Пусть $S = (0,T)\times\Gamma$. Вектор $\vec{u} = (u_1(t,x_1,x_2), u_2(t,x_1,x_2))$ – усредненная по высоте скорость течения. Величина $h = h(t,x_1,x_2)$ интерпретируется как расстояние по вертикали от ровного дна водоема, расположенного в плоскости x_1ox_2, до свободной поверхности жидкости. Система включает константу Галилея $g = 9.8\ (m/c^2)$, равную модулю ускорения свободного падения. Система (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$\vec{u}|_S = 0,\ (\vec{w}\cdot\vec{n})|_S = 0,\ \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x_1,x_2),\ h|_{t=0} = h_0(x_1,x_2). \qquad (2)$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали к Γ. Отметим, что второе условие в (2) влечет, что $\frac{\partial h}{\partial n}|_S = 0$.

Система (1) представляет собой регуляризованную систему Сен-Венана, аналогом которой в газовой динамике является квазигазодинамическая система уравнений, выведенная в [1]. Детальный анализ свойств регуляризованных уравнений Сен-Венана представлен в [2]. Ранее вопросы регулярной разрешимости задачи (1)–(2) не рассматривались.

В настоящей работе мы показываем, что в каждом из случаев при определенных условиях на данные задача (1)–(2) локально по времени имеет единственное решение, принадлежащее классу $W_p^{1,2}(Q)$.

Литература

1. Четверушкин Б.Н. Кинетически согласованные схемы в газовой динамике. Москва.: Московский государственный университет, 1999.

2. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва; Ижевск.: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ергалиев М. Г.

Институт математики и математического моделирования НАН РК,
Алматы, Казахстан, ergaliev@math.kz

Пусть $0 < T < \infty$ и $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$. Рассмотрим начально-граничную задачу для следующего вырождающегося гиперболического уравнения

$$\partial_t \left(t^\beta \partial_t u(x,t)\right) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \text{ в } Q, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \ \lim_{t\to+0} t^\beta \partial_t u(x,t) = 0 \text{ в } \Omega. \tag{3}$$

Ранее в работе [1] был исследован случай слабого вырождения, а именно, когда $\beta \in [0,1)$. В нашей работе мы изучаем вопросы разрешимости этих задач для случая сильного вырождения, когда $\beta \in [1,2]$.

Литература

1. Кахарман Н. Общие регулярные краевые задачи для вырождающихся гиперболи- ческих уравнений. Алматы. PhD диссертация, 2023.

2. Hussein M.S., Lesnic D., Kamynin V.L., Kostin A.B. Direct and inverse source problems for degenerate parabolic equations //Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2020. Т.28, С. 425Ц448.

ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА-МАКСВЕЛЛА-БЛОХА

Есмаханова К. Р.[1], Сулейменов К. М.[2], Жасыбаева М. Б.[3], Атантаева С. А.[4]

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан,
[1]kryesmakhanova@gmail.com; [2]kenessary@mail.ru
[3] mzhassybaeva@yahoo.com; [4]saniya.atantayeva@gmail.com

В данном работе, мы разработаем новые интегрируемые системы, связанные с нелокальными версиями (1+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера и Максвелла-Блоха. Это уравнение является одной из обобщенных форм нелинейного уравнения Шредингера [1-5]. Распространение оптических солитонов в волокнах, резонансных и эрбиевых системах управляется системой, включающей нелинейное уравнение Шредингера и уравнения Максвелла-Блоха. В работе будет доказана интегрируемость данного уравнения и построены точные солитоноподобные решения.

Литература

1. Da-Wei Zuo. Modulation instability and breathers synchronization of the nonlinear Schrodinger Maxwell–Bloch equation// Applied Mathematics Letters. 2018. Vol. 79. P. 182-186.

2. Yang Ren, Zhan-Ying Yang, Chong Liu, Wen-Li Yang. Different types of nonlinear localized and periodic waves in an erbium-doped fiber system// Physics Letters A. 2015. Vol. 379, Issues 45–46. P. 2991-2994.

3. Da-Wei Zuo, Yi-Tian Gao, Long Xue, Yu-Jie Feng,Yu-Hao Sun. Rogue waves for the generalized nonlinear Schrodinger–Maxwell–Bloch system in optical-fiber communication// Applied Mathematics Letters. 2015. Vol. 40. P. 78-83.

4. Nakazawa M., Yamada E., Kubota H. Coexistence of self-induced transparency soliton and nonlinear Schrodinger soliton //Physical Review Letters. 1991. Vol.66. P.2625.

5. Xing Lu, Hong-Wu Zhu, Xiang-Hua Meng, Zai-Chun Yang, Bo Tian. Soliton solutions and a Backlund transformation for a generalized nonlinear Schrodinger equation with variable coefficients from optical fiber communications // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 336, Issue 2. P. 1305-1315.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Жамалов Б. И.

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
b-i-jamalov@mail.ru

В области Ω рассматривается корректная краевая задача для уравнений

$$S_1Lu = 0,\ S_2Lu = 0,$$

где $S_1 = a\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c$, $S_2 = a\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial}{\partial x}+c$, $a,\ \ b,\ \ c \in R,\ \ Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0. \end{cases}$
Краевая задача рассматривается в области: $\Omega = \Omega_1 \cup J \cup \Omega_2$, где

$$\Omega_1 = \left\{(x,y) : 0 < x < 1,\, 0 < y < h\right\}, J = \left\{(x,y) :\ 0 < x < 1,\ y = 0\right\},$$

$\Omega_2 = \left\{(x,y) :\ -y < x < y+1,\ -\dfrac{1}{2} < y < 0\right\}$, $h \in R^+$, т.е. Ω_1- прямоугольная область, ограниченная отрезками $AB,\ BB_0,\ B_0A_0$ и A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = h$ и $x = 0$, а Ω_2- характеристический треугольник, ограниченный отрезком $A\,(0,0)\,,\ \ B\,(1,0)$ оси ox и двумя характеристиками $AC:\ \ x+y = 0$, $BC:\ \ x-y = 1$ уравнения колебании струны, выходящими из точек A, B и пересекающимися в точке $C\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Задача B_1. Найти решение уравнения в области Ω при $y \neq 0$, непрерывное в $\bar{\Omega}$ вместе с производными, приведчнными в краевых условиях и удовлетворяющее краевым условиям:

$$u_x\,(0,y) = m_1u\,(0,y) + n_1u\,(1,y) + \varphi_1\,(y)\,, 0 \le y \le 1,$$

$$u_x\,(1,y) = m_2u\,(0,y) + n_2u\,(1,y) + \varphi_2\,(y)\,, 0 \le y \le 1,$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x),\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x),\ 0 \le x \le \frac{1}{2}, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x),\ \frac{1}{2} \le x \le 1$$

и условиям сопряжения $u(x,-0) = u(x,+0), u_y(x,-0) = u_y(x,+0), u_{yy}(x,-0) = u_{yy}(x,+0)$. Здесь n- внутренняя нормаль, $\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3-$ заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие естественным условиям согласования, $n_i,\ m_i\,(i = 1,2)-$ постоянные.

О НЕКОТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ КАК МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО КОЛЕБАНИЯ

Жапсарбаева Л. К.[1], Кайраткызы А.[2]
Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева,
Астана, Казахстан,
[1]leylazhk67@gmail.com; [2]kairatkyzy_agnura@mail.ru

Различные задачи, изучаемые теорией дифференциальных уравнений в начально-краевых задачах, как модель нелинейного колебания, для уравнений упругой пластины и вопросы, связанные с ее использованием, до сих пор являются актуальными задачами первой важности [1].

В данной работе мы изучаем физическую модель [2], основанную на теории модели колебаний [3]:

$$\Delta^2 w = Q_g(x, y, w) - Q_s(x, y), \forall (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

где Q_s – распределенная весовая нагрузка, Ω – средняя плоскость недеформированной пластины, Q_g – распределенная нагрузка, расширяющегося грунта.

Предполагалось, что тонкая пластина защемлена по краям [4]:

$$\omega|_{\delta\Omega} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial n}\omega|_{\delta\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – нормальная производная вдоль границы $\partial\Omega$.

Литература

1. Ахиезер Н.И. Глазман И.М. Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1978. – 264 с.

2. Коллац Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 504 с.

3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

4. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ РЕОЛОГИИ ЭЛЛИСА

Жапсарбаева Л. К.[1], Уэй Д.[2], Багымкызы Б.[3]

[1]Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан, leylazhk67@gmail.com;

[2]Назарбаев Университет, Астана, Казахстан, dongming.wei@nu.edu.kz

[3]Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан, bagyzhan.bagymkyzy@nu.edu.kz

В данной работе мы строим аналитическое и численное решение обобщенного уравнения Бюргерса используя некоторые граничные условия для неньютоновских жидкостей, где реологическое поведение описывается с помощью модели Эллиса:

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x})=\mu\frac{\partial}{\partial x}(\tau\left(a+b|\tau|^{\alpha-1}\right)),$$

где ρ - плотность, u- скорость течения жидкости, μ - вязкость, a, b, α -реологические параметры, τ -напряжение сдвига.

Нахождение аналитического и численного решения нелинейного дифференциального уравнения Бюргерса на основе реологии Эллиса служит прямым применением ее к физическим, механическим задачам.Такие задачи применяются в различных областях физики, как механика жидкости, газовая динамика или транспортный поток [1-4].

Данное исследование финансируется Комитетом по науке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23489433).

Литература

1. Y.D. Wadhwa. Generalized Couette flow of an ellis fluid AlChEJ, 12 (1966), pp. 890–893.

2. Steller, R. T. (2001). Generalized slit flow of an Ellis fluid, Polym. Eng. Sci., 41, 1859–1870.

3. Tadmor Z., Gogos C.G.Principles of polymer processing. Wiley-Interscience publication, pp. 736–739.

4. Orlandi, P. (2000). The Burgers equation. In: Orlandi, P. (eds) Fluid Flow Phenomena. Fluid Mechanics and Its Applications, vol 55. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/ 978-94-011-4281-64

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Жураев А. Х.

Наманганский инженерно–строительный институт, Наманган, Узбекистан
a-x-juraev@mail.ru

В области $D^- = \{(x,y):\ -\infty < x < 0,\ 0 < y < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Будим говорить, что $u(x,y)$ регулярное решение уравнения (1), если оно удовлетворяет уравнению (1) в области D^-, принадлежит классу $C^{5,2}_{x,y}(D^-) \cap C^{4,1}_{x,y}(D^- \cup \Gamma)$ (где $\Gamma = \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{y=1\}$) и ограничено на бесконечности в месте с производными до 5-го порядка включительно.

Задача A. Найти регулярное решение уравнения (1) в области D^- удовлетворяющее краевым условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha u(x,0) + \beta u_y(x,0) = 0 \\ \gamma u(x,1) + \delta u_y(x,1) = 0 \end{array} \right. , \quad -\infty < x < 0, \tag{2}$$

$$u(0,y) = \psi_1(y),\ u_x(0,y) = \psi_2(y),\ u_{xx}(0,y) = \psi_3(y), \tag{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,y) = \lim_{x\to-\infty} u_x(x,y) = 0, \tag{4}$$

где $\psi_i(y) \in C^4[0,1],\ \alpha\psi_i(0) + \beta\psi_i'(0) = 0,\ \gamma\psi_i(1) + \delta\psi_i'(1) = 0,\ \alpha\psi_i''(0) + \beta\psi_i'''(0) = 0,\ \alpha\psi_i''(1) + \beta\psi_i'''(1) = 0$, $i = 1,2$. Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - постоянные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0,\ \gamma^2 + \delta^2 \neq 0,\ \alpha^2 + \gamma^2 \neq 0$.

Отметим, что аналогичная задача для пятого порядка в работах [1-2] исследованы некоторые корректные краевые задачи.

Теорема. Если $\alpha\beta \leq 0,\ \delta\gamma \geq 0$, то задача A имеет единственное решение.

Теорема доказана методом интегралов энергии. Существование решения задачи доказана с помощью разделения переменных. Найдены условия на заданные функции, обеспечивающие регулярность решения поставленной задачи. При обосновании равномерной сходимости установлено отличие от нуля "малого знаменателя".

Литература

1. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О разрешимости краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в конечной области. Узбекский математический журнал. 2011, №2, - С.40-47.

2. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Вторая краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2012. Т. 14. №1. -С.22-27.

p-КОНВЕКСИФИКАЦИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ БАНАХА-КАНТОРОВИЧА

Закирова Г. Б.

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;
zg1090@list.ru;

Пусть B произвольная полная булева алгебра, и пусть $L^0(B) := C_\infty(Q(B))$ алгебра всех непрерывных функций $x : Q(B) \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, определенных на стоуновском компакте $Q(B)$, отвечающем булевой алгебре B, которые принимают значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$.

Пусть (Ω, Σ, μ) измеримое пространство с σ-конечной мерой, $L^0(\Omega)$ алгебра всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на (Ω, Σ, μ) и пусть $B(\Omega)$ полная булева алгебр всех идемпотентов из $L^0(\Omega)$.

Пусть $m : B \to L^0(\Omega)$ – строго положительная $L^0(\Omega)$-значная мера на B, обладающая свойством Магарам, т.е. для любых $e \in B,\ f \in L^0(\Omega),\ 0 \le f \le m(e)$, существует такое $q \in B,\ q \le e$, что $m(q) = f$. В этом случае [1], существует единственный инъективный вполне аддитивный булев гомоморфизм $\varphi : B(\Omega) \to B$ такой, что $\nabla(m) = \varphi(B(\Omega))$ есть правильная булева подалгебра в B, и $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ для всех $q \in B(\Omega)$, $e \in B$. Кроме того, алгебра $L^0(\Omega)$ отождествляется с подалгеброй $L^0(\nabla(m)) = C_\infty(Q(\nabla(m)))$ в алгебре $L^0(B)$.

Пусть E – ненулевой $L^0(\nabla(m))$-подмодуль в $L^0(B)$, и пусть $\|\cdot\|_E$ есть $L^0(\Omega)$-значная норма на E, наделяющая E структурой решеточно нормированного пространства над $L^0(\Omega)$. Рассмотрим конструкцию p-конвексификации для решеточно нормированных пространств $(E, \|\cdot\|_E)$ над $L^0(\Omega)$. Для каждого $1 \le p < \infty$ определим множество $E^{(p)} = \{x \in L^0(B) : |x|^p \in E\}$, и положим $\|x\|_{E^{(p)}} = \||x|^p\|_E^{\frac{1}{p}},\ x \in E^{(p)}$. Пространство $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$, которое также является решеточно нормированным пространством над $L^0(\Omega)$, называется p-конвексификацией решеточно нормированного пространства $(E, \|\cdot\|_E)$.

Пусть $\mathcal{P}(L^0)$ множество всех тех $\mathbf{0} \le \lambda \in L^0(\Omega)$, для которых носитель $s(\lambda) := \sup\limits_{n\ge1}\{|\lambda| > n^{-1}\} = \mathbf{1}$. Два положительных элемента x и y из $L^0(B)$ называются m-равноизмеримыми, если $m\{x > h\} = m\{y > h\}$ для любого $h \in \mathcal{P}(L^0)$.

Пусть $(E, \|\cdot\|_E) \subset L^0(B)$ – решетка Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$ со свойством идеальности. Говорят, что E есть симметричное пространство Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$ (см. [3]), если из m-равноизмеримости элементов x и y, где $0 \le x \in L^0(B),\ 0 \le y \in E$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Теорема. *Если $(E, \|\cdot\|_E)$ является симметричным пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$, то его p-конвексификация $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ также является симметричным пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$.*

ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ПРИ ВНЕЗАПНОМ СУЖЕНИИ

Закиров А. Х., Ражабов А. З.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент;
asqar_z@mail.ru

Течение после внезапного сужения и расширения трубы является одним из часто встречающихся случаев отрывного потока при обтекании острых кромок тел. Внезапное сужение плоского канала или трубы часто встречается при обтекании аэродинамических поверхностей и элементов теплоэнергетического оборудования.

Цель настоящей работы состоит в получении аналитического решения задачи о течении идеальной жидкости в трубе с внезапным сужением. Формулируется математическая модель течения, в основу которой положены уравнения Эйлера и уравнения неразрывности для идеальной среды.

Рассматривается стационарное течение идеальной жидкости в канале с внезапным сужением. Течение является симметричным относительно оси канала. Предполагается, что массовые силы и поверхностные натяжения отсутствуют. Струя жидкости, выходящая из сужающейся части трубы, образует свободную поверхность с неизвестной границей. Давление на границе струи равно давлению в окружающем пространстве, т.е. постоянно.

Для определения плоского потока достаточно найти функцию скоростей $\overline{V} = V_0 e^{(-i\theta)}$, где V_0 – величина скорости и θ – угол наклона скорости к оси x.

Используем метод Н.Е.Жуковского, для этого введем в рассмотрение аналитическую функцию $\omega = \ln \frac{V_0}{V} = \tau + i\theta$, где $\tau = \ln \frac{V_0}{V}$.

Область, занятую движущейся жидкостью, отобразим на верхнюю половину параметрической плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Отображение области комплексного потенциала на верхнюю полуплоскость (ζ) осуществляется аналитической функцией $W(\zeta) = -\dfrac{q}{\pi}\ln(\zeta + 1) + iq$, где q – заданный расход жидкости.

Согласно методу Н.Е.Жуковского, функции $\omega(\zeta)$ и $W(\zeta)$ выражаются через параметрическую переменную ζ, изменяющуюся в верхней полуплоскости, и вместо функции $z(\zeta)$ можно искать функцию $\omega(\zeta)$. Записывая граничные значения для функции $\omega(\zeta)$ на верхней полуплоскости (ζ), и пользуясь интегральной формулой Шварца, находим функции $\omega(\zeta)$.

Разделяя действительную и мнимую части в выражении комплексной скорости, найдчм распределение скоростей на каждом отрезке границы верхней полуплоскости. С помощью функций $\dfrac{dW}{d\zeta}$ и $\overline{V}(\zeta)$ в указанных областях можно найти все геометрические характеристики области течения в физической плоскости (z).

Литература

1. Muratov M.A., Chilin V.I. Algebras of measurable and locally measurable operators. Institute of Mathematics Ukrainian Academy of Sciences, Kiev, 2007.

2. Chilin V., Zakirov B. Maharam traces on von Neumann algebras // Methods of functional analysis and topology, 16(2010), 101–111.

3. Kunze W. Noncommutative Orlicz Spaces and Generalized Arens Algebras // Math. Nachr. 147(1990), 123–138.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Зикиров О. С.[1], Холиков Д. К.[2]

[1]Национальный университет Узбекистана, Ташкент;
[2]Ташкентский архитектурно-строительный университет, Узбекистан
zikirov@yandex.ru xoliqov23@mail.ru

В работе исследуются нелокальные краевые задачи и задачи с интегральными условиями для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка вида

$$Mu \equiv Lu + \int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)dx = -f(x,t), \tag{1}$$

где $Lu \equiv u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_x + d(x,t)u_t + e(x,t)u$ — псевдопараболический оператор, а $k(x,t)$ — заданная функция.

Такого вида уравнения возникают в теории фильтрации жидкостей в пористых средах, не установившегося движения грунтовых вод со свободной поверхностью, в теории влагопереноса в почве, динамике распространения волн и многих других дисциплинах, связанных с математическим моделированием.

В плоскости независимых переменных (x,t) рассмотрим нагруженное уравнение в частных производных третьего порядка

Для уравнения (1) поставим следующую задачу:
Найти в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному $u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l$, и следующим граничным условиям:

$$u(0,t) = \beta(t)\int\limits_0^l u(x,t)dx + \int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau + \psi_1(t),\ u_x(l,t) = \psi_2(t),\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

здесь функции $\varphi_0(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\beta(t)$, $\rho(t,\tau)$ заданы, непрерывны на $[0,l]$ и $[0,T]$, $0 \le \tau \le t$, соответственно. Кроме того удовлетворяют условиям согласования

$$\varphi_0(0) = \beta(0)\int_0^l \varphi_0(x)dx + \psi_1(0), \qquad \varphi_0'(l) = \psi_2(0).$$

Доказательство теорем существования и единственности классических решений нелокальных задач (3) для уравнения (1) проводится методами Римана и интегральных уравнений.

В данной работе кроме этого изучается разрешимость нелокальной задачи с условиями типа А.А.Самарского и задачи с интегральными условиями для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка (1). С помощью метода Римана доказываются теоремы существования и единственности классических решений исследуемых задач.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В ОБЛАСТИ - ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ПОЛОСА

Зуннунов Р. Т.[1], **Эргашев А. А.**[2]
[1]Филиал РГУ Нефти и Газа (НИУ) имени И.М. Губкина в г. Ташкенте.Узбекистан, zunnunov@mail.ru;
[2]Кокандский государственный педагогический институт, Коканд, Узбекистан, akramxon-ergashev@gmail.com

Краевые задачи для уравнений смешанного (эллиптико-гиперболического) типа первого рода в ограниченных и неограниченных областях достаточно полно изучены, а краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода в ограниченных областях изучены в работах, например Кароля И.Л., Смирнова М.М, но краевые задачи в неограниченных областях остаются малоизученными и эта работа является продолжением исследований в этом направлении.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y|y|^m u_{yy} = 0,\ 0 < m < 1 \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_0 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) :\ -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}$, $l_0 = \{(x,y) :\ 0 < x < 1,\ y = 0\}$ а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками

$$AC :\ x - [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 0, BC :\ x + [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точки $C\left(-\frac{1}{2}; \left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2-m}{2}}\right)$.

Введем обозначения

$$\beta = \frac{m}{2\,(m-2)}, -\frac{1}{2} < \beta < 0, l_1 = \{(x,y) : 1 < x < +\infty,\ y = 0\},$$

$$l_2 = \{(x,y) : -\infty < x < 0,\ y = 0\}, l_3 = \{(x,y) : -\infty < x < +\infty,\ y = 1\}.$$

Задача T^∞. Найти функцию $u(x,y)$ со следующим и свойствами:
1) $u(x,y) \in C(\Omega \cup \overline{l_1} \cup \overline{l_2} \cup l_3 \cup AC \cup BC) \cap C^1(\Omega \cup l_0) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$;
2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2;
3) удовлетворяет условиям

$$u(x,1) = \varphi(x), -\infty < x < +\infty,\ u(x,0) = \psi_1(x), -\infty < x \le 0,$$

$$u(x,0) = \psi_2(x), 1 \le x < +\infty,\ \lim_{|x|\to\infty} u\,(x,y) = 0, \quad \text{равномерно по} \quad y \in [0,1]\,,$$

$$u\,|_{AC} = \psi_3\,(x)\ ,\ 0 \le x \le 0,5.$$

где $\varphi(x)$, $\psi_i\,(x)\ \left(i = \overline{1,3}\right)$ – заданные функции.

Единственность решения исследуемой задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения методом функций Грина и интегральных уравнений.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЯЗКО-ТРАНСЗВУКОЙ УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Иброхимов Х. К.
Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
xusniddin571@mail.ru

В области $D = \{(x, y): \quad 0 < x < p, \ \ 0 < y < q\}$, рассмотрим уравнения

$$Ł\,[u] \equiv u_{xxx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

где $p > 0, \quad q > 0$ постоянные вещественные числа, и для него исследуем следующую задачу.

Задача A. Найти функцию $u\,(x, y)$ из класса $C^{3,2}_{x,y}\,(D) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} \alpha u\,(x, 0) + \beta u_y\,(x, 0) = 0, \\ \gamma u\,(x, q) + \delta u_y\,(x, q) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} au\,(0, y) + bu_{xx}\,(0, y) = \psi_1\,(y)\,, \\ cu\,(p, y) + du_{xx}\,(p, y) = \psi_2\,(y)\,, \\ u_x\,(0, y) = \psi_3\,(y)\,, \end{cases} \tag{3}$$

здесь α, β, γ, δ, a, b, c и d - заданные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$ а $\psi_i\,(y)$, $i = \overline{1, 3}$ - заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\gamma\psi_i\,(q) + \delta\psi'_i\,(q)\,, \quad \alpha\psi_i\,(0) + \beta\psi'_i\,(0)\,, \quad i = \overline{1, 3}. \tag{4}$$

Теорема. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $ab \leq 0, \ cd \geq 0, \ \alpha\beta \leq 0, \ \gamma\delta \geq 0$, оно единственно.

Теорема доказана с методом интегралов энергии. Существование решения доказано методом разделения переменных. Решение данной задачи представлено явно в виде бесконечного ряда, с обоснованием возможности почленного дифференцирования ряда по всем переменным. При обосновании равномерной сходимости установлено отличие от нуля "малого знаменателя".

Литература

1. Апаков Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, Т., "Фан ва технология" 2019 г. 154 с.

2. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных. Узбекский математический журнал. 2007. №.1. -С. 14-23.

3. Апаков Ю.П. Об одном задаче для вязкого трансзвукового уравнения в прямоугольной области// ТДПУ. Ташкент. 15.03.2016. -С.78-76.

О СИСТЕМЕ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ, НЕ ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВОМ БАЗИСНОСТИ, СВЯЗАННЫХ С НАГРУЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ КРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ С РЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА СЕГМЕНТЕ

Иманбаев Н. С.[1,2], Садыбеков М. А.[1]

[1] Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан, imanbaevnur@mail.ru;

[2] Южно-Казахстанский педагогический университет им. О.Жанибекова, Шымкент, Казахстан,
makhmud.sadybekov@gmail.com

Рассматривается спектральная задача для нагруженного дифференциального оператора второго порядка

$$L_1 v \equiv v''(x) - p(x)v'(0) = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$v'(1) + \alpha v(0) = 0, \quad v(0) + v(1) = 0, \quad \text{при } \alpha > 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Характеристический определитель нагруженного дифференциального оператора L_1 представим в виде*

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\left[1 + \alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2} + \frac{C_k^{(1)}}{\lambda - (\pi + 2\pi k)^2}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \cdot 2\delta_k \frac{C_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2}\right)\right], \tag{3}$$

где $\Delta_0(\lambda) = \alpha\sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\left(1 + \cos\sqrt{\lambda}\right)$ - характеристический определитель невозмущенного оператора $L_0 v = -v''(x) = \lambda v(x)$ с краевыми условиями (2), а α_k – коэффициенты Фурье разложения $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k v_k(x)$ по биортогональной системе $\{v_k(x)\}$, составленной из собственных функций сопряженного невозмущенного оператора.

Теорема 2. *Множество функций $p(x)$, для которых система собственных функций нагруженного дифференциального уравнения оператора L_1 в пространстве $L_2(0,1)$ не образует безусловного базиса, является плотным в $L_2(0,1)$.*

Отметим, что сопряженный оператор L_1^* имеет аналогичную структуру в этом частном случае, то есть система собственных функций оператора L_1^* также не является базисом в $L_2(0,1)$.

Вывод: сопряженные операторы одновременно не обладают свойством базисности.

Данная работа была выполнена при поддержке гранта МНВО РК №23485279.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЖРБАШЯНА-НЕРСЕСЯНА

Иргашев Б. Ю.

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан
bahromirgasev@gmail.com

Задача Коши. В области $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < T\}, T < +\infty$ найти регулярное решение $u(x, y)$, следующей задачи:

$$\begin{cases} D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_{m-1},\gamma_m\}} u(x,y) - (-1)^{s-1} \frac{\partial^{2s} u(x,y)}{\partial x^{2s}} = f(x,y), s = 2,3,..., \\ \lim\limits_{y\to+0} D_{0y}^{\{\gamma_0\}} = \varphi_0(x), \\ \lim\limits_{y\to+0} D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1\}} = \varphi_1(x), \\ ... \\ \lim\limits_{y\to+0} D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_{m-1}\}} = \varphi_{m-1}(x). \end{cases}$$

Здесь $D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_{m-1},\gamma_m\}}$ - оператор дробного дифференцирования Джрбашяна-Нерсесяна порядка $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{m} \gamma_k - 1 > 0, \alpha < 2$ (см.[1]). Найдены достаточные условия при которых функция вида

$$u(x,y) = \sum_{l=0}^{m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(\xi) \Gamma_{b_l}(x,\xi,y,0) d\xi + \int_0^y \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta) \Gamma_{b_{m-1}}(x,y,\xi,\eta) d\xi d\eta -$$

есть решение задачи Коши. Здесь

$$\Gamma_{b_l}(x-\xi, y-\eta) = \frac{(y-\eta)^{b_l}}{2s} \sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k \phi\left(-\frac{\alpha}{2s}, b_l+1; -\lambda_k t\right), y > \eta,$$

$$b_l = \alpha_l - \frac{\alpha}{2s}, \lambda_k = e^{\frac{-1-2k}{2s} i\pi}, t = \frac{|x-\xi|}{(y-\eta)^{\frac{\alpha}{2s}}}, \phi(-\delta, \varepsilon; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(-\delta k + \varepsilon)}$$

- функция Райта. Отметим, что случай $s = 1$, с оператором Лапласа исследован в [2]. Идея метода построения решения взята из [3].

Литература

1. Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка //АН АрмССР. Матем.,3:1 (1968), с. 3–28.

2. Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. матем.2009. Т.73. N 2. С. 141–182.

3. Карашева Л.Л. Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 696–706.

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА - БИЦАДЗЕ

Искакова У.[1], **Лес А К.**[2]

[1,2]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
[2]a.les@math.kz

Пусть $\Omega \subset R^2$ ограниченны при $y > 0$ гладкая, кривая δ, а при $y < 0$ характеристиками $AC : x + y = 0$, $BC : x + y = -1$ уравнения.

$$Lu = sgnyu_{xx} + u_{yy} = f(x, y). \tag{1}$$

Задача $\boldsymbol{N_s}$: Найти решение уравнения $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^2\left(\Omega^-\right) \cap C(\Omega)$, удовлетворяющее условием

$$N\left[u\right]|_{x,y\in\partial\Omega} = -\frac{u\left(x\right)}{2} + \int_{\Omega^+} \frac{\partial}{\partial\eta_y}\widetilde{\varepsilon}\left(x, y, \xi, \eta\right) u\left(\xi, \eta\right) dS_{\xi,\eta} -$$

$$-\int_{\partial\Omega} \varepsilon\left(x, y, \xi, \eta\right) \frac{\partial u}{\partial\eta_y}\left(y\right) dS_{\xi,\eta}$$

$$-\int_{\eta=0} \frac{\partial\varepsilon\left(x, 0, \xi, 0\right)}{\partial\eta} u\left(\xi, 0\right) dS_{\xi,\eta}, \quad (x, y, \xi, \eta) \in \partial\Omega^+$$

$$u|_{AC} = 0, \quad u|_{BC} = 0, \tag{2}$$

Здесь $\Omega^- = \ \Omega \cap y < 0$, $\Omega^+ = \ \Omega \cap y > 0$,

$$\widetilde{\varepsilon}(x, y, \xi, \eta) = \varepsilon(x, y, \xi, \eta) - \varepsilon(x, y, \xi, -\eta), \tag{3}$$

где $\varepsilon\left(x, y, \xi, \eta\right) = \frac{1}{2\pi} ln\left[\left(\left(x-\xi\right)^2 + \left(y-\eta\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ – фундаментальное решение уравнения (1).

Отметим что задача в классе гладких функции $u \in C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ некорректна.

Имеет место. **Теорема.** Для любой $f \in C^1(\overline{\Omega})$ существует единственное решение $u\left(x, y\right) \in C^2\left(\Omega^+\right) \cap C^2\left(\Omega^-\right) \cap C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < \alpha < 1$, удовлетворяющее уравнению (1) и краевым условиям (2)-(3), а сопряженной задачей для (1)-(3) является задачи

$$L^+\vartheta = sgnyu_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \tag{1*}$$

$$N\left[u\right] = 0, \tag{2*}$$

$$u|_{AB} = 0. \tag{3*}$$

Задачи (1)-(3)и (1*)-(3*) разрешимы в явном виде для произвольной области Ω^+.

Литература

1. Кальменов Т.Ш., Кахарман Н. An overdetermined problem for elliptic equations. AIMS Mathematics (Q1, процентиль 87%), 2024.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Исломов Б.И.[1], Убайдуллаев У. Ш.[2]

[1]Национальный университет в Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент;
[2]Самаркандский филиал Ташкентского государственного экономического университета;
islomovbozor@yandex.ru[1]; ulugbekuz88@ mail.ru[2]

В последние годы возник интерес исследованию методом спектрального анализа[1] однозначной разрешимости и устойчивости решения прямых и обратных задач для модельного уравнения смешанного типа второго порядка в прямоугольной области. Отметим работы М.М. Хачева [2], Б.И.Исломова и Г.К. Кылышбаевой[3].

Заметим, что краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа, когда параболическая часть содержит оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля или Капуто в специальных областях мало изучена. Отметим работы [4-5].

В настоящей работе в прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, -p < y < r\}$ методом спектрального анализа изучается краевая задача нового типа с граничным условием второго рода для уравнения параболо - эллиптико - гиперболического типа

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_cD^{\alpha}_{qy}u - \lambda^2 u, & x > 0, \ \ y > q, \\ u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u, & x > 0, \ \ y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & x > 0, \ \ y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где λ, l, $p > 0$, $r > 0$, $0 < q < r$ – заданные действительные числа. ${}_cD^{\alpha}_{qy}$ – оператор дробного дифференцирования по y в смысле Капуто порядка $\alpha \in (0, 1]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований проект ФЗ-202009211.

Литература

1. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Москва : Наука. 2016. 271 с.

2. Хачев М.М.Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьев –Бицадзе в прямоугольной области.//"Дифференциальные уравнения". 1978.Т.14.№1 .С.136-139.

3. Islomov B.I., Kilishbaeva G.K. Boundary value problems for third-order mixed equations in the rectangular domain.// Science and Education in Karakalpakstan. 2022. №2/1(24). P.32-41.

4. Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области. // "Научный вестник. Математика". 2017. №5. С. 25-30.

5. Islomov B.I., Ubaydullayev U.Sh. On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain. // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. №. 9. P. 1801–1810.

ОПИСАНИЕ СПЕКТРА 3×3 ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ В ФЕРМИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

Исмоилова Д. Э.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,
d.e.ismoilova@buxdu.uz

Через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi; \pi]^{\mathrm{d}}$ обозначим d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ - одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L^2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $\mathcal{H}_2 := L^2_{\mathrm{as}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) антисимметричных функций двух переменных, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L^2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, т.е.

$$\mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L^2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2.$$

В гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{as}}^{(2)}(L^2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ рассмотрим операторную матрицу

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами

$$A_{00} f_0^{(\mathrm{s})} = s\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})}, \quad A_{01} f_1^{(\mathrm{s})} = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1^{(-\mathrm{s})}(t) dt,$$

$$(A_{11} f_1^{(\mathrm{s})})(k_1) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1)) f_1^{(\mathrm{s})}(k_1), \quad (A_{12} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2^{(-\mathrm{s})}(k_1, t) dt,$$

$$(A_{22} f_2^{(\mathrm{s})})(k_1, k_2) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2).$$

Здесь $f = \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}; \mathrm{s} = \pm\}$, $f_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha, \alpha = 0, 1, 2$; $\varepsilon > 0$-фиксированное вещественное число, $w(\cdot)$ и $v(\cdot)$ - вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а $\alpha > 0$ - "параметр взаимодействия".

Рассматриваемый матричный модель $\mathcal{A}$, связан с системой, описывающий два одинаковых фермионов и одной частицы иной природы на решетке, взаимодействующих с помощью операторов рождения и уничтожения.

Задача об изучение спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$ приведется [1] к исследованию спектра блочно-операторной матрицы третьего порядка с дискретным переменным и установливается соотношение для спектра, существенного, точечного спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$. Выделяются двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра блочно-операторной матрицы $\mathcal{A}$. Показывается, что существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}$ состоит из объединения не более, чем 6 отрезков.

Литература

1. Расулов Т.Х., Исмоилова Д.Э. Спектральные соотношения для матричной модели в фермионном пространстве Фока. Изв. вузов. Матем., 2024, №3, С. 91-96.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

Исмоилов А.И.

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,
e-mail ismoilovaxrorjon@yandex.com;

Рассмотрим уравнение

$$L\left(u\right)=u_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\xi-\eta}u_{\xi}+\frac{\alpha}{\xi-\eta}u_{\eta}=f\left(\xi,\eta\right), \tag{1}$$

в характеристическом треугольнике Δ плоскости $\xi O\eta$, ограниченной отрезками $\overline{OA}=\{(\xi,\eta):\eta=\xi,0\leq\xi\leq1\}$, $\overline{CA}=\{(\xi,1):0\leq\xi\leq1,\}$, $\overline{OC}=\{(0,\eta):0\leq\eta\leq1\}$, где $0<\alpha,\beta,\alpha+\beta<1$, $u\left(\xi,\eta\right)$, $f\left(\xi\right)$ неизвестные функции.

Задача D. Найти $f\left(\xi\right)$, $u\left(\xi,\eta\right)\in C\left(\overline{\Delta}\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u\left(\xi,\xi\right)=\tau\left(\xi\right),\quad 0\leq\xi\leq1;\qquad u\left(0,\eta\right)=\psi_1\left(\eta\right),\quad 0\leq\eta\leq1, \tag{2}$$

$$u\left(\xi,1\right)=w\left(\xi\right),\quad 0\leq\xi\leq1 \tag{3}$$

где $\tau\left(\xi\right)$, $\psi_1\left(\eta\right)$, $w\left(\xi\right)$ – заданные непрерывные функции, причем $\psi_1\left(0\right)=\tau\left(0\right)$.

Приняв функцию $f\left(\xi\right)$ за известную, решим эту задачу методом Римана и запишем решение в следующем виде:

$$u\left(\xi,\eta\right)=\gamma_1(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\int\limits_0^{\xi}\frac{\tau\left(t\right)}{(\eta-t)^{1-\alpha}(\xi-t)^{1-\beta}}dt+$$

$$+\int\limits_0^{\eta}\left[\psi'_1\left(z\right)+\frac{\beta}{z}\psi_1\left(z\right)\right]H\left(0,z;\xi,\eta\right)dz+\int\limits_0^{\xi}f\left(t\right)dt\int\limits_t^{\eta}H\left(t,z;\xi,\eta\right)dz, \tag{4}$$

где $H(x,y;\xi,\eta)dz$ Римана-Адамара для уравнения (1).

Подчиним (4) условию (3). Затем, выполнив некоторые вычисления, мы получим интегральное уравнение в следующем виде:

$$f\left(\xi\right)+\frac{1+\beta}{1-\xi}\int\limits_0^{\xi}f\left(t\right)dt\int\limits_t^{1}\frac{\partial}{\partial\xi}H\left(t,z;\xi,1\right)dz=\frac{1+\beta}{1-\xi}F'\left(\xi\right), \tag{5}$$

$$F(\xi)=w(\xi)-\gamma_1(1-\xi)^{1-\alpha-\beta}\int\limits_0^{\xi}\frac{(\xi-t)^{\beta-1}\tau(t)dt}{(1-t)^{1-\alpha}}-\int\limits_0^{1}\left[\psi'_1\left(z\right)+\frac{\beta}{z}\psi_1\left(z\right)\right]H\left(0,z;\xi,1\right)dz$$

Если интегральное уравнение (5) имеет решение, то и задача D также будет иметь решение.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Кадиркулов Б. Ж.[1,2], Жалилов М. А.[3]
[1]Университет Альфраганус, Ташкент, Узбекистан,
[2]Институт Математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
kadirkulovbj@gmail.com;
[3]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,
alimuhammad9978@mail.ru

Рассмотрим двумерное дробное параболическоее уравнение вида

$$t^{-\beta} D_{0+}^{\alpha} u(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) + g(x,y). \tag{1}$$

Здесь $\beta > 0$- заданное действительное число, $x_0 = p/q$ - заданное рациональное число, причем $0 < p/q < 1,\ q - p = 2$, ${}_C D_{0t}^{\alpha} u = I_{0t}^{1-\alpha}(u_t)$, $\alpha \in (0,1]$ - дифференциальный оператор дробного порядка в смысле Капуто [1]. Отметим, что в случае $\alpha = 1$ дробная производная совпадает с производной первого порядка, то есть ${}_C D_{0t}^{1} u = u_t$.

Ведчм следующие обозначения

$$\Omega_{x,y} = \{(x,y):\ 0 < x, y < 1\}, \Omega_{z,t} = \{(z,t):\ 0 < z < 1;\ 0 < t < T\}, \Omega = \Omega_{x,y} \times (0,T)$$

и в области Ω рассмотрим следующую задачу.

Задача А. Требуется найти пару функций $(u(x,y,t), g(x,y))$, из класса

$$u, u_x, u_y \in C(\bar{\Omega}),\ t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha} u, u_{xx}, u_{yy} \in C(\Omega), g(x,y) \in C(\bar{\Omega}_{x,y})$$

удовлетворяющее в области Ω уравнению (1) и условиям

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ u(x,y,T) = \psi(x,y),\ (x,y) \in \bar{\Omega}_{x,y},$$

$$u\,|_{x=0} = 0,\ u_x\,|_{x=1} = u_x\,|_{x=x_0},\ (y,t) \in \bar{\Omega}_{y,t},$$

$$u\,|_{y=0} = u\,|_{y=1} = 0,\ (x,t) \in \bar{\Omega}_{x,t},$$

где $\varphi(x,y), \psi(x,y)$- заданные функции.

В данной работе для дробного дифференциального уравнения второго порядка с двумя пространственными переменными, исследуется обратная нелокальная задача, где граничные условия по первой переменной заданы как нелокальные условия типа Бицадзе-Самарского [2], а по второй переменной условия Дирихле.

Литература

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations (North-Holland Mathematics Studies, 204). Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

2. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. //Название журнала. Докл. АН СССР. -1969. -Т. 185. №4. С. 739Ц740.

ОБЩАЯ ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Кальменов Т.Ш.[1], Кыдырбайкызы А.[1,2]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан, kalmenov.t@mail.ru;

[1,2]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан, atow020522@gmail.com

Задача Бицадзе-Самарского для уравнения Лапласа [1] была первой корректной неграничной задачей, где наряду с граничными условиями задавались связанной с ними внутренние условия. Данная работа посвящена решению общих задач Бицадзе-Самарского для уравнения теплопроводности.

В области D ищем общий вид решения $u(x) \in W_2^{1,2}(D)$ уравнения (1)

$$\Diamond u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) u = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее неравенству

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(D)} \leq c\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2}$$

Обозначим через $\Diamond^*_{y,\eta} v = \left(-\dfrac{\partial}{\partial \eta} - \Delta_y\right) v$, а $\varepsilon(x,t,y,\eta)$ – фундаментальное решение уравнения (1).

Имеет место

Теорема 1. Пусть для любой $f \in L_2(?)$ существует единственное решение $u(x) \in W_2^{1,2}(D)$ уравнения (1) удовлетворяющее неравенству (2). Тогда существует единственная функция $\mu(x,y) \in W_2^2(?) \cap L_2(D)$ такая, что $u(x,t)$ представим в виде

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \varepsilon(x,t,y,\eta) f(y,\eta)dyd\eta + \int\limits_\Omega \varepsilon(x,t,\xi,0) \int\limits_\Omega \mu(\xi,y,\eta) f(y,\eta) d\eta dy d\xi, \tag{3}$$

из (3) при $f = \Diamond u$, $\Diamond^*_{y,\eta}\mu = \left(-\dfrac{\partial}{\partial \eta} - \Delta_y\right)\mu = \sum\limits_{j=1}^n \rho_{S_j}(y,\eta)\delta_{S_j}(y,\eta), S_j \in \overline{D}$ $n-1$ мерной поверхности следует представление решения классической задачи Бицадзе-Самарского для уравнения (1).

Литература

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач //ДАН СССР. 1969. Т. 185, №4. С. 739–740.

2. Кальменов Т. Ш., Отелбаев М. Критерий граничности интегральных операторов //Доклады Академии наук. - Федеральное государственное бюджетное учреждение "Российская академия наук 2016. Т. 466, №4. С. 395–395.

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Каримов К. Т.[1], Шокиров А. М.[2]

[1,2]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,
karimovk80@mail.ru; shokirovasror@mail.ru

Пусть $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Delta,\ z = (0, c)\}$, где $\Delta-$ конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная при $y \geq 0$ дугой $\bar{\sigma}_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ и при $y \leq 0$ отрезками

$$\overline{AB} = \{(x, y) : y = -x - 1,\ x \in [-1, -1/2]\},\ \overline{OB} = \{(x, y) : y = x,\ x \in [-1/2, 0]\},$$
$$\overline{OC} = \{(x, y) : y = -x,\ x \in [0, 1/2]\},\ \overline{CD} = \{(x, y) : y = x - 1,\ x \in [1/2, 1]\},$$
$$O = O\,(0, 0)\,,\ A = A\,(-1, 0)\,,\ B = B\,(-1/2, -1/2)\,,\ C = C\,(1/2, -1/2)\,,\ D = D\,(1, 0)\,.$$

Рассмотрим уравнение

$$U_{xx} + \mathrm{sgn} y \cdot U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x}U_x + \frac{2\beta}{|y|}U_y + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0, \tag{1}$$

в области Ω, где $U = U\,(x, y, z)$, а $\beta, \gamma \in R$ причем $\beta, \gamma \in (0, 1/2)$.

В области Ω уравнения (1) принадлежит смешанному типу, т.е. в области Ω_0- эллиптическому типу, а в областях Ω_1 и Ω_2- гиперболическому типу, причем $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ является плоскостями сингулярности уравнения, а при переходе через прямоугольников $\bar{\Omega} \cap \{y = 0\}$ уравнения меняет свой тип.

Для уравнения (1) в области Ω методом спектрального анализа исследована следующая задача:

Задача G. Найти функцию $U\,(x, y, z)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим условиям:

$$U\,(x, y, z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{2,2,2}_{x,y,z}\left(\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2\right);\ U\,(x, y, z)|_{\bar{S}_0} = F\,(x, y, z)\,;$$
$$U\,(x, y, z)|_{\bar{S}_1} = 0,\quad U\,(x, y, z)|_{\bar{S}_2} = 0;\ U\,(x, y, z)|_{\bar{S}_3} = 0,\quad U\,(x, y, z)|_{\bar{S}_4} = 0,$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta}\, U_y\,(x, y, z) = \lim_{y \to +0} y^{2\beta} U_y\,(x, y, z)\,,\qquad x \in (-1, 0) \cup (0, 1),\ \ z \in (0, c)\,,$$

где $F\,(x, y, z)-$ заданная функция.

Задача Геллерстедта на плоскости для разных уравнений смешанного типа изучались в работах [1] и др. Поставленная трехмерная задача G при $\beta = \gamma = 0$ исследовано в работе [2].

Литература

1. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte: Thes. doct. Uppsala, 1935.

2. Moiseev E.I., Nefedov P.V. Gellerstedt problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D-domain // Integral Transforms and Special Functions, 2014, Vol. 25, Issue 7. P. 509-512.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ

Каримов Ш. Т.[1], **Тулашева Ё. И.**[2]

[1]Ферганский государственнй университет, Фергана, Узбекистан, shaxkarimov@gmail.com;

[2]Наманганский государственнй университет, Наманган, Узбекистан, yorqinoytulasheva@gmail.com

Вырождающиеся уравнения моделируют процессы, происходящие вблизи границ различных областей. Влияние границ приводит к тому, что вблизи границы меняется тип или порядок уравнения, описывающего процесс. В этом случае говорят, что уравнение вырождается. Вырождающиеся уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены.

В данной работе рассмотрим многомерное вырождающееся уравнение четвертого порядка вида

$$u_{tt} + t^p \Delta^2 u + \lambda^2 t^p u = f(x,t), \;\; x \in R^n, \;\; t > 0, \tag{1}$$

где λ, $p \in R$, причем $p \geqslant 0$, $\Delta^2 = \Delta\Delta-$бигармонический оператор, а $\Delta-$ многомерный оператор Лапласа.

При $p = 0, \lambda = 0$ уравнение (1) встречается в задачах о колебаниях балок и пластин, которые имеют важное значение в строительной механике, теории устойчивости вращающихся валов и вибрации кораблей.

В области $\Omega = \{(x,t) : \, x \in R^n, \;\; t \in R, \, t > 0\}$ для уравнения (1) можно поставить и исследовать задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in R^n, \tag{2}$$

где $\varphi(x), \psi(x)-$ заданные гладкие функции.

В задаче (1), (2) сделаем замену переменных $y = [2/(p+2)]t^{(p+2)/2}$. Тогда уравнение (1) и начальные условия (2) соответственно примут вид

$$u_{yy} + \frac{2\beta}{y} u_y + \Delta^2 u + \lambda^2 u = f_0(x,y), \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; \lim_{y \to +0} y^{2\beta} u_y(x,y) = \psi_0(x), \;\; x \in R^n, \tag{4}$$

где $f_0(x,y) = (1-2\beta)^{4\beta} y^{-4\beta} f[x, \; (1-2\beta)^{2\beta-1} y^{1-2\beta}]$, $\psi_0(x) = (1-2\beta)^{2\beta}\psi(x)$, $2\beta = p/(p+2)$ причем при $p > 0$, имеем $0 < 2\beta < 1$.

В этой работе применяя оператор преобразования Эрдейи-Кобера исследовано решение задачи Коши (3), (4). При этом поставленная задача сведена к задаче для уравнения без вырождения. Предложенный подход очень эффективен и позволяет построить точное решение сформулированной задачи. Эти точные решения могут быть использованы в качестве тестовых примеров для асимптотических, приближчнных и численных методов.

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И РАЗРЕШИМОСТИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПЕРИДИНАМИКИ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Касимова М. Ш.

Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, marjonakasimova14@gmail.com

Одним из главных преимуществ теории перидинамики перед классической механикой сплошной среды является её способность описывать деформацию твёрдых тел при больших деформациях, когда классическая механика сплошной среды уже не действительна.

Линейная перидинамическая модель может быть описана следующим интегро-дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\int_{T^3} K_\alpha(y)[u(x+y,,t)-2u(x,t)+u(x-y,t)]dy = f(x,t), x\in T^3, t>0 \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \qquad x\in T^3 \quad (2)$$

и периодическими условиями

$$u(x_1+2\pi,x_2,x_3,t)=u(x_1,x_2,x_3,t), \quad u(x_1,x_2+2\pi,x_3,t)=u(x_1,x_2,x_3,t),$$
$$u(x_1,x_2,x_3+2\pi,t)=u(x_1,x_2,x_3,t), \qquad x\in T^3. \quad (3)$$

Здесь $T^3=[-\pi,\pi]^3$, $u: T^3\times[0,T]\to R^3$ – неизвестная вектор-функция, ядро $K_\alpha(y)=\frac{(y\otimes y)}{|y|^{\alpha+2}}, \quad \alpha>0, \quad y\in T^3$ есть 3×3 матрица-функция с областью определения $T^3\times T^3$, $\varphi: T^3\to R^3$, $\psi: T^3\to R^3$ – начальными условиями, а $f: T^3\times[0,+\infty)\to R^3$ внешняя сила.

Рассмотрим оператор

$$Bv(x)=\frac{1}{2}\int_{T^3} K_\alpha(y)[v(x+y,,t)-2v(x,t)+v(x-y,t)]dy. \quad (4)$$

При условии $3<\alpha<5$ оператор $B: C_0^\infty\to L_2(T^3)$ удовлетворяет оценку снизу

$$\|Bv\|_{L_2(T^3)}\le const\|v\|_{L_2^{\alpha-3}(T^3)}, v\in C_0^\infty(T^3). \quad (5)$$

А также, из-за плотности $C_0^\infty(T^3)$ в пространстве $L_2^{\alpha-3}(T^3)$ справедлива оценка (5) для этого оператора.

Теорема 1. *Пусть $\mu\ge\alpha-3$. А также начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно принадлежат пространству Соболева $L_2^\mu(T^3)$ и $L_2^{\mu-\frac{(\alpha-3)}{2}}(T^3)$, а внешняя сила $f(x,t)$ при фиксированном $t\ge 0$ имеет ограниченную норму в пространстве $L_2^{\mu-\frac{(\alpha-3)}{2}}(T^3)$. Тогда решение задачи (1)–(3) существует и единственно. Полученное решение представляется сходящимся рядом Фурье.*

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Касимов Ш. А.

Ташкентский государственный транспортный университет. Ташкент, Узбекистан
shuxrat1812@mail.ru

Исследование нестационарных пограничных слоев представляет значительный интерес, так как позволяет, например, понять поведение течения при его формировании и выходе на стационарный режим, изучить влияние ускорения тела на характер трения и тепло обмена, выяснить законы развития возмущений. Самостоятельный интерес представляют также исследование и решение новых краевых задач математической физики, которые описывают течение в таких нестационарных пограничных слоях.

Рассмотрим задачу формирования пограничного слоя над полубесконечным плоским телом, движущегося со скоростью $V = \mathrm{A}t^n$ в несжимаемой покоящейся жидкости, где t – время, и n – параметры.

В переменных Крокко уравнение движение имеет вид [1] :

$$\omega^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \xi(u-\xi)\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{n}{n+1}\xi(1-u)\frac{\partial \omega}{\partial u} + (u - 3\frac{n}{n+1}\xi)\frac{\omega}{2} = 0, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\omega = 0 \quad \text{при} \quad u = 1, \quad 0 \le \xi \le \infty, \\ &\frac{\partial \omega}{\partial u} = -\frac{n}{n+1}\xi \quad \text{при} \quad u = 0, \quad 0 \le \xi \le \infty, \\ &\omega = f_0(u) \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad 0 \le u \le 1, \\ &\omega = f_1(\xi = 1, u) \quad \text{при} \quad \xi = 1, \quad 0 \le u \le 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\omega = \left(\frac{\sqrt{\nu x}}{V^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{\partial V_x}{\partial y}, \quad u = \frac{V_x}{V}, \quad \xi = \frac{x(n+1)}{At^{n+1}},$$

x, y – декартовы координаты,связанные с пластиной, V_x – продольная составляющая скорости в пограничном слое, ν – коэффициент кинематической вязкости, $f_0(u)$ – решение Блазиуса, $f_1(1,u)$ – решение Уотсона [2].

Математическая особенность исследуемой задачи обусловлена тем, что для уравнений параболического типа (1) необходимо рассматривать к эллиптическиеь по типу краевые условия (1).

В области $u \in [0,1]$, $\xi \in [0,1]$ нелинейное уравнение (1) в частных производных параболического типа является сингулярным из-за наличия знакопеременного коэффициента при первой производной по временно-подобной координате ξ. Тем самым возникают математические трудности, связанные с непосредственным решением подобных сингулярных уравнений.

Для решения рассматриваемой задачи можно воспользоваться методом интегральных соотношений, который в настоящее время эффективно применяется для решения различных задач механики жидкостей и газов. В отличие от традиционного способа, метод необходимо использовать отдельно в каждой из областей, в которых знак при конвективной производной не меняется, с последующим сопряжением решений на линии сингулярности.

Использование известных численных методов [3] для решения данной задачи сопряжено с большими трудностями из-за наличия внутри расчетной области линии $u = \xi$, которая разграничивает области влияния в пограничном слое. Поэтому для решения задачи введем производную по фиктивному времени τ в уравнении (1) и построим итерационный процесс, сводящийся к установлению по τ.

К этой задаче в своё время проявил большой интерес Тухтамурад Джураевич. Ценные рекомендации и советы по решению аналогичных научных и других задач блестящего уччного, непревзойденного математика и великой Личности с прекрасными человеческими качествами Т.Д.Джураева оставили неизгладимый след в сердце автора этой статьи.

Литература

1. Демьянов А.Ю.,Касымов Ш.А. Численное исследование некоторых нестационарных автомодельных задач. Сборник научных трудов "Численный анализ,математическое моделирование и их применение в механике". –М:. Изд. МГУ. 1988. – С.77–80.

2. Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.Наука. 1986, 736 с.

3. Когеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. – Новосибирск: Наука, 1990, 302 с.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННЫЕ С БИГАРМОНИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Касимов Ш. Г., Нуримбетова Г. К.

Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент,
shokiraka@mail.ru

В данной работе рассматривается задача с начальными и граничными условиями для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, связанных с бигармоническими операторами с дробной производной вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,y,t)+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^{2m}u(x,y,t)+\sum_{i=1}^{n}b_i^2(-1)^{s_i}\frac{\partial^{2s_i}u(x,y,t)}{\partial y_i^{2s_i}}=F(x,y,t), \quad (1)$$

$$(x,y,t)\in Q=\Pi\times\Pi\times(0,T),\ \Pi=(0,\pi)\times...\times(0,\pi),\ l-1<\alpha\le l,\ l=-[-\alpha]$$

с начальными

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(x,y,0)=\varphi_i(x,y),\ \ (x,y)\in\Pi\times\Pi,\ \ i=1,2,...l, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial^{4k}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k}}\,|_{x_j=0}=0,\quad \frac{\partial^{4k+2}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k+2}}\,|_{x_j=0}=0,\quad k=\overline{0,m-1},j=\overline{1,n} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^{4k}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k}}\,|_{x_j=p}=0,\quad \frac{\partial^{4k+2}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k+2}}\,|_{x_j=p}=0,\quad k=\overline{0,m-1},j=\overline{1,n} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^{2k}u(x,y,t)}{\partial y_j^{2k}}\,|_{y_j=0}=0,\quad \frac{\partial^{2k}u(x,y,t)}{\partial x_j^{2k}}\,|_{y_j=p}=0,\quad k=\overline{0,s-1},j=\overline{1,n.} \quad (5)$$

Здесь $m,s,l\in N$ и $p,T>0$ – заданные положительные числа, $D_{0t}^{\alpha}u(x,y,t)$ – дробная производная Римана-Лиувилля и $F(x,y,t),\varphi_i(x,y)$, $i=1,2,...,l$ – достаточно гладкие функции разлагаемые по собственным функциям соответствующей спектральной задачи.

Решение начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующими спектральными задачами. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространстве Соболева.

Теорема 1. *Пусть начальные функции $\varphi_i(x,y), i=1,2,...,l$ и правую часть $F(x,y,t)$ достаточно гладкие функции разлагаемые по собственным функциям соответствующей спектральной задачи. Тогда регулярное решение задачи (1)–(5) существует и единственно. Полученное решение представляется сходящимся рядом Фурье.*

МОДЕЛИРОВАНИЕ КУСОЧНОЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕНЬЮТОНОВКИХ ФЛЮИДОВ В ДВУХСЛОЙНОМ ИЗОЛИРОВАННОМ ПЛАСТЕ

Каюмов Ш., Арзикулов Г. П., Бувашеров Д. С., Хусанов Э. А.

Ташкентский государственный технический университет, Ташкент, Узбекистан

elbekhusanov02@gmail.com

Задачи фильтрации неньютоновских флюидов, подчиняющего кусочно-линейному закону представляет интерес, так как там имеется зоны аномальной подвижности и зоны линейной подвижности. Математические модели этих задач для слоистых пластов, мало изучен и имеются отдельные работы, рассматривающие их в общем аспекте задача фильтрации.

Рассмотрим гидро-динамически несвязанные двух пластовую систему, содержащая неньютоновских флюидов, где переток между пластами отсутствует. Предполагается, что связь между пластами происходит по стволу единой разрабатываемой скважины.

Математическая модель этой задачи ставиться так:

Найти непрерывные функции $U_i(x,t)$ и подвижные границы $l_i(x,t)$ из следующий системы уравнения вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{K_i \cdot H_i}{\mu_i}(1 - \frac{\gamma_0 \cdot \beta_i}{\mid \bigtriangledown U_i \mid})\frac{\partial U_i}{\partial x}) = M_1 \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad x \in (x_0, l_i(t)), \qquad t > 0. \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{K_i \cdot H_i}{\nu_i}\frac{\partial U_i}{\partial x}) = M_1 \frac{\partial U_i}{\partial t} \qquad x \in (l_i(t), L_i), \qquad t > 0. \tag{1}$$

с начальными

$$U_i(x,0) = \psi_0(x), \quad l_i(x,0) = l_0. \tag{3}$$

а также условиями на неизвестных подвижных границах:

$$|\frac{\partial U_i}{\partial x}|_{x=l_i-0} = |\frac{\partial U_i}{\partial x}|_{x=l_i+0} = \beta_1, \quad U_i(x,t)|_{x=l_i-0} = U_i(x,t)|_{x=l_i+0} \tag{4}$$

и условия на совместной скважине

$$a_1 \frac{K_1 \cdot H_1}{\mu_1}(1 - \frac{\bar{\gamma}_0 \cdot \beta_1}{\mid \bigtriangledown U_1 \mid})\frac{\partial U_1}{\partial x}|_{x=x_0} + a_2 \frac{K_2 \cdot H_2}{\mu_1}(1 - \frac{\bar{\gamma}_0 \cdot \beta_1}{\mid \bigtriangledown U_2 \mid})\frac{\partial U_2}{\partial x}|_{x=x_0} = \varphi(t). \tag{5}$$

Кроме того ставятся условия непроницаемости пластов на $x = L_i$.

В задаче (1)-(5) $K_1, K_2, \nu_1, \nu_2, H_1, H_2, a_1, a_2, b_1, b_2, \bar{\gamma}_0, i = \overline{1,2}$ коэффициенты и функции аналогично работы Молоковича, функции $\varphi(t)$ -суммарная добыча единой скважиной из обоих пластов в точке x_0. Нелинейная задача (1)-(5) решается методами: итерации и сеточным вариантом метода прямых и разностной прогонки. Вычислительные алгоритмы апробирован на гипотетических тестовых данных, результаты которого показали применимости данной методики и алгоритмов вычислений.

ДВУХФАЗНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА

Койлышов У. К.[1]**, Садыбеков М. А.**[2]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,
[1] koylyshov@math.kz; [2] sadybekov@math.kz;

В данной работе обосновано решение методом разделения переменных начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при общих краевых условиях и доказана теорема о существовании и единственности классического решения поставленной задачи.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

$$u_t = k_j^2\ u_{xx}, \tag{1}$$

в области $\Omega = \cup\Omega_j, \Omega_j = \{(x,t) : l_{j-1} < x < l_j, 0 < t < T\}$, где $(j = 1,\ 2)$, с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad l_0 \leqslant x \leqslant l_2 \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_1 u_x(l_0,t) + \beta_1 u(l_0,t) = 0, \\ \alpha_2 u_x(l_2,t) + \beta_2 u(l_2,t) = 0, \end{cases} \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

и с условиями сопряжения

$$u(l_1 - 0, t) = \ u(l_1 + 0, t), \qquad k_1 u_x(l_1 - 0, t) = \ k_2\ u_x(l_1 + 0, t), \tag{4}$$

где коэффициенты $k_j > 0,\ (j = 1, 2)$, $\alpha_i,\ \beta_i, (i = 1, 2)$ являются действительными числами, кроме того $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0,\ \ (i = 1, 2)$.

Через W обозначим линейное многообразие функций из класса $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega_1}) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega_2})$, которые удовлетворяют всем условиям (2)-(4).

Функцию $u(x,t)$ из класса W будем называть классическим решением задачи (1)-(4), если она удовлетворяет уравнению (1) в обычном, непрерывном смысле. Имеет место следующая

Теорема. *Пусть $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая краевым условиям*

$$\alpha_1\varphi'(l_0) + \beta_1\varphi(l_0) = 0, \qquad \alpha_2\varphi'(l_2) + \beta_2\varphi(l_2) = 0, \tag{5}$$

и условиям сопряжения

$$\varphi(l_1 - 0) = \ \varphi(l_1 + 0), \quad k_1\varphi(l_1 - 0) = \ k_2\varphi(l_1 + 0), \tag{6}$$

тогда существует единственное классическое решение задачи (1)-(4).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта КН МНВО РК AP 19679487

О КОРРЕКТНОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Кошанов Б.Д.[1], Султангазиева Ж.Б.[2]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,
koshanov@math.kz;

[2]Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан
zhanat_87@mail.ru

Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ с гладкой компактной границей $\Gamma = \partial\Omega$. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T),\ S = \Gamma \times (0,T),\quad 0 < T < +\infty$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv (-1)^p D_t^{2p} u + \Delta u - \lambda u = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, Δ – оператор Лапласа, λ – действительный параметр, $f(x,t)$ – заданная функция.

Краевая задача $I_{p,\lambda}$: Требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Q такое, что

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0,\ k = m, ..., m+p,\ x \in \Omega \tag{3}$$

$$\int_0^T N(t)u(x,t)dt = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Постановку краевых задач для таких операторов (1) впервые предложен В.Н. Враговым. Дальнейшие исследования для подобных операторов связаны работы. Одним из основных условий корректности в этих работах было условие неотрицательности параметра λ.

В данной работе будут представлены результаты о корректности (единственности и неединственности, существовании и несуществовании) нелокальных краевых задач с частично интегральными по времени переменной для вышеприведенного уравнения. Также будут анализированы случаи неотрицательности и положительности параметров λ. Будет также доказана, что однородная задача (1)-(4) имеет линейно независимых решений. Обычно такое не имеет место при гиперболическом операторе.

Работа выполнена при поддержке грантов BR 20281002 и AP 14869558 Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан.

ОСЦИЛЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 4-ГО ПОРЯДКА НА МЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Кулаев Р. Ч.

Северо–Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Владикавказ, Россия,
kulaevrch@mail.ru;

Доклад посвящен построению осцилляционной спектральной теории для дифференциального оператора на метрическом графе Γ, возникающего при моделировании систем стержней [1, 2]. Дифференциальный оператор задачтся набором обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах γ_i графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u')' + r_i(x)u = \lambda\rho_i(x)u, \quad x \in \gamma_i, \tag{1}$$

набором условий согласования в каждой узловой вершине a:

$$\begin{gathered} u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_i'(a) = 0, \quad i \in I(a), \\ \sum_{i\in I(a)} [(p_i u_i'')' - (q_i u')](a) + r(a)u(a) = \lambda\rho(a)u(a), \end{gathered} \tag{2}$$

где $I(a)$ – множество индексов ребер, примыкающих к узловой вершине a, и краевыми условиями на границе $\partial\Gamma$ графа

$$u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{3}$$

Обсуждаются качественные свойства решений однородного дифференциального уравнения, порождаемого соотношениями (1), (2): вопросы распределения нулей, аналоги теорем сравнения Штурма, теория неосцилляции. Также рассматриваются вопросы о простоте и кратности собственных значений краевой задачи (1)–(3), обсуждаются вопросы об осцилляционности спектра. В частности, установлено, что дифференциальный оператор краевой задачи (1)–(3) наследует осцилляционные спектральные свойства, аналогичные свойствам оператора Штурма-Лиувилля.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. –М.: Физматлит, 2007.

2. Kulaev, R.Ch., Urtaeva, A.A., Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network// Math. Meth. Appl. Sci., 2023. P. 1–21.

ВЕРОЯТНО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА

Мадияров М. Н.[1], Алимбекова Н. Б.[1], Байгереев Д. Р.[1], Ергалиев Е. К.[1]

[1]Восточно-Казахстанский университет имени С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан,
e-mail: madiyarov_mur@mail.ru

Целью данной работы является создание вероятно-статистической математической модели для оценки качества атмосферного воздуха в каждой необходимой части города на базе дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка, учитывающего стохастический характер рассеяния примесей в турбулентной атмосфере. Данная цель достигается модификацией классического дифференциального уравнения адвекции-диффузии посредством введения производных дробного порядка и случайных функций. При решении классического дифференциального уравнения адвекции-диффузии пренебрегаются взаимное влияние частиц воздуха и вредного вещества, а их стохастическое движение учитывается с помощью коэффициента турбулентности потока [1]. В некоторых случаях делают допущение об изотропной турбулентности. Основным недостатком диффузионных моделей является допущение об однородности поля турбулентных пульсаций по всем направлениям. Однако характер движения дисперсной фазы в турбулентном потоке является вероятно-статистическим, в связи с чем все попытки описать его детерминированными зависимостями приводит к существенному снижению анализа.

Поэтому нами разработана новая математическая модель рассеяния примесей вредных веществ в атмосфере на основе стационарных стохастических уравнений дробного порядка. Для решения данной задачи построен дискретный аналог задачи методом конечных разностей/конечных элементов. Построен вычислительный алгоритм решения задачи. Для апробации созданной математической модели проведены вычислительные эксперименты для выявления аномальных скоплений загрязняющих веществ в атмосферном воздухе города Усть-Каменогорск.

Данное исследование профинансировано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP19679550).

Литература

1. Palmeira A., Xavier P., Moreira D. Simulation of atmospheric pollutant dispersion considering a bi-flux process and fractional derivatives // Atmospheric Pollution Research. 2020. Vol. 11, №. 1. pp. 57–66.

2. Madiyarov M., Temirbekov N., Alimbekova N., Malgazhdarov Y., Yergaliyev Y. A Combined Approach for Predicting the Distribution of Harmful Substances in the Atmosphere Based on Parameter Estimation and Machine Learning Algorithms // Computation. 2023. Vol. 11, 249.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБАЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Мадрахимова З.С., Йигиталиева С.

Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент,
zilolaxonmadrahimova@gmail.com, sarvinoz0010@icloud.com

В 1969 году А.М. Нахушев [1] предложил ряд задач нового типа, вошедших в математическую литературу под названием краевых задач со смещением, которые, как оказалось, тесно связаны с нагруженными дифференциальными уравнениями.

Выяснили, что многие весьма важные задачи математической физики и биологии, особенно задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, движения мало-сжимаемой жидкости, окруженной пористой средой, приводят к краевым задачам для нагруженных дифференциальных уравнений.

В процессе исследования уравнений смешанного типа с нагрузкой, существующие принципы экстремума и теоремы существования, а также методы классической теории не могут быть применены напрямую. Локальные и нелокальные задачи для нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка с тремя линиями изменения типа изучены в работах [2-3].

Однако, несмотря на имеющиеся многочисленные работы по краевым задачам для смешанных уравнений, до сих пор остается не исследованные локальные и нелокальные краевые задачи **с** разрывными условиями склеивания для нагруженных уравнений параболо – гиперболического типа второго порядка.

Настоящая работа посвящена постановке и изучению локальной краевой задаче **с** разрывными условиями склеивания для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа, содержащий в себе след искомой функции вида

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y-\lambda_0 u, & x>0,\ y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}+\lambda_1 u+\mu_1 u\,(x,0)\,, & x>0,\ y<0,\\ u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2 u-\mu_2 u\,(0,x+y)\,, & x<0,\ y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}-\lambda_3 u-\mu_3 u\,(1,x-y)\,, & x>1,\ y>0,\end{cases}$$

λ_0,λ_j, μ_j−заданные действительные числа, причем $\lambda_0\geq 0$, $\mu_j\geq 0$ $(j=\overline{1,3})$.

Литература

1. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука. 2006.

2. Исломов Б., Холбеков Ж.А.Исследование краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа. //ДАН РУз. Математика. 2015 . №6. С.11-14 .

3. Исломов Б. И., Холбеков Ж. А. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. 25(3). С. 407–422.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Максудов Р. З.

Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства" , Ташкент, Узбекистан;
rusmaks-85@mail.ru

Большинство физических законов природы описываются уравнениями в частных производных, решения которых зависят от нескольких переменных. В качестве примеров можно привести уравнения Максвелла, закон теплообмена Ньютона, уравнения Навье-Стокса, нестационарное уравнение Шредингера в квантовой механике, уравнения фильтрации в подземной гидравлике.

Рассмотрим, как применяется метод сеток для решения волнового уравнения (уравнения колебаний струны). Пусть требуется найти решение $u = u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad x \in (0,1), t \in (0,T], \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(0,t) = \gamma_0(t), u(1,t) = \gamma_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

и начальным условиям:

$$u(x,0) = \alpha(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \beta(x), \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

Рассмотрим явную разностную схему, для определения неизвестного y_i^{j+1} необходимо знать решения на двух предыдущих слоях по времени.

Запишем разложение решения в ряд Тейлора:

$$u(x,t) = u(x,t_0) + \frac{\tau}{1!}\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial t^2} + O(\tau^3), \tag{4}$$

Из исходного уравнения и начального условия следует:

$$\frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial t^2} = a^2(x,t_0)\frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial x^2} + f(x,t_0) = a^2(x,t_0)\alpha^{//}(x) + f(x,t_0).$$

Понятие устойчивости разностной схемы является составной частью определения корректности разностной схемы. Как было отмечено [1], [2] погрешность аппроксимации второго начального условия в данном случае будет $\sim O(\tau^2)$.

Отметим, что явная разностная схема устойчива при условии: $\tau^2 \leq \frac{h^2}{\max a^2(x,t)}$.

Можно также доказать сходимость решения разностной схемы к решению исходной задачи.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Мамадалиев Н.А.[1], Мустапокулов Х.Я.[2]

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
[1] m_numana59@mail.ru [2] m_hamdam@mail.ru

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс описываемый системой линейных дифференциально - разностьных уравнений нейтрального типа

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \sum_{i=0}^{k} B_i z(t-h_i) + \sum_{i=0}^{k} C_i \dot{z}(t-h_i) + f(u,v), \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1; A,\ B_i\,(i = 1,2,\cdots,k),$ — постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$; $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_k$ — константы; u, v — управляющие параметры; u — параметр преследования, v — параметр убегания, $u \in P \subset \mathbb{R}^p,\ v \in Q \subset \mathbb{R}^q$, P и Q — непустые компакты; $f : P \times Q \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция по совокупности переменных.

В качестве начального положения системы (1) задана n — мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h_k, 0]$. Кроме того, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задано терминальное множество M, $M \subset \mathbb{R}^n$, имеющее цилиндрический вид: $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, а M_1 — компактное подмножество подпространства L, где L — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$).

Определение. *Будем говорить, что в игре (1) может быть закончена из начального положения $\varphi(\cdot)$, за время $T = T(\varphi(\cdot))$ если можно выбрать такое допустимое управление $u(t) = u(\varphi(\cdot), v^t(\cdot)) \in P,\ 0 \leq t \leq T,\ v^t(\cdot) = \{v(s) : 0 \leq s \leq t\}$, что решение уравнения $\dot{z}(t) = Az(t) + \sum_{i=0}^{k} B_i z(t-h_i) + \sum_{i=0}^{k} C_i \dot{z}(t-h_i) + f(u(t), v(t))$, при любых измеримых функциях $v(t)$, $v(t) \in Q,\ 0 \leq t \leq T$, попадает множеству M в момент времени $t = T$.*

Пусть π — оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L.

Рассмотрим многозначное отображение

$$F(t,v) = \pi K(t) f(P,v),\ F(t) = \bigcap_{v \in Q} F(t,v),\ t \geq 0,\ W(t) = \int_0^t F(s)ds.$$

Предположение. *Множество $F(t)$ непусто для всех $t \geq 0$.*

Теорема. *Если выполнено предположение 1, и существует момент времени $t = t_1 > 0$ такой, что при $T = t_1$ имеет место включение $\Phi\,(t)\,\varphi(\cdot) \in W(t)$, где*

$$\Phi\,(t)\,\varphi\,(\cdot) = \Big[K(t) - \sum_{i=1}^{k} K(t-h_i)B_i\Big]\varphi(0) + \sum_{i=0}^{k} \int_{-h_i}^{0} K(t-s-h_i)\Big[B_i\dot{\varphi}(s) + C_i(s)\Big]ds.$$

Тогда дифференциально- разностная игра (1) может быть закончена из заданного начального положения $\varphi\,(\cdot)$ за конечное время $T(\varphi(\cdot)) = t_1$.

О ПОСТАНОВКЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Мамажонов М.[1]**, Шерматова Х. М.**[2]**, Мамажонов С. М.**[3]

[1]Кокандский государственный педагогический институт, Коканд, Узбекистан, mirzamamajonov@gmail.com;

[2]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан, hilola-1978@mail.ru

[3]Кокандский университет, Коканд, Узбекистан, sanjarbekmamajonov@gmail.com

В настоящем сообщении ставится одна краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(Lu) = 0, \tag{1}$$

в области G плоскости xOy, где $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3$, а G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках $C(2,0)$, $E(1/2,-3/2)$, $D(-1,0)$; G_3, G_4 – прямоугольники с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0 и B, B_0, $C_0(2,1)$, $C(2,0)$ соответственно; J_1, J_2 и J_3 – открытые отрезки с вершинами в точках C, D; A, A_0; B, B_0 соответственно, а

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, \ (x,y) \in G_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, \ (x,y) \in G_j, \ j = 2,3,4. \end{cases}$$

Для уравнения (1) в области G ставится следующая задача:

Задача М. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая

1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G \backslash J_1 \backslash J_2 \backslash J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} и u_{yy} – непрерывны вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях;

2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G \backslash J_1 \backslash J_2 \backslash J_3$;

3) удовлетворяет 9 краевым условиям и 8 условиям склеивания на линиях изменения типа (здесь мы не смогли показать эти условия).

Доказывается следующая теорема:

Теорема. Если $\varphi_1 \in C^4[0,1]$, $\varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[1/2,2]$, $\psi_2 \in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3 \in C^4[0,1/2]$, $\psi_4 \in C^3[-1,1/2]$, $\psi_5 \in C^2[-1,1/2]$, $\psi_6 \in C^3[1/2,2]$, $\psi_7 \in C^2[1/2,2]$, причем выполняется условие согласования $\varphi_1(0) = \psi_1(2)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(-1)$, $\tau_1(0) = \tau_2(0) = \tau_4(0)$, $\tau_1(1) = \tau_3(1) = \tau_5(0)$, $\nu_1(0) = \nu_2(0) = \tau_4'(0)$, $\nu_1(1) = \nu_3(1) = \tau_5'(0)$, $\tau_1'(0) = \nu_4(0)$, $\tau_1'(1) = \nu_5(0)$, тогда задача М имеет единственное решение.

Замечание. В работе [1] рассмотрена краевая задача в смешанной области с двумя характеристическими линиями изменения типа.

Литература

1. Apakov Yu.P., Mamajonov S.M. Solvability of a Boundary Value Problem for a Fourth Order Equation of Parabolic-Hyperbolic Type in a Pentagonal Domain // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021, 15 (4), pp. 586–596.

ПОСТАНОВКА НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В СМЕШАННОЙ ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Мамажонов М.

Кокандский государственный педагогический институт, Коканд, Узбекистан,
mirzamamajonov@gmail.com

В этом сообщении ставится ряд краевых задач для уравнения

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0, \tag{1}$$

в области G плоскости xOy, где $a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$, причем $a_i^2+b_i^2 \neq 0$ $(i=1,2)$; $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, а G_1, G_3, G_4 – квадраты с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; A, $D(-1,0)$, $D_0(-1,1)$, A_0; B, B_0, $C_0(2,1)$, $C(2,0)$ соответственно; G_2 – треугольник с вершинами в точках $C(2,0)$, $E(1/2,-3/2)$, D; J_1, J_2, J_3 – открытые отрезки с вершинами в точках C, D; A, A_0; B, B_0 соответственно, а

$$Lu=\begin{cases} u_{xx}-u_y, \ (x,y)\in G_1, \\ u_{xx}-u_{yy}, \ (x,y)\in G_j, \ j=2,3,4. \end{cases}$$

Различные случаи получаются в зависимости от угловых коэффициентов $\gamma_i=\dfrac{b_i}{a_i}$, $(i=1,2)$ операторов первого порядка в уравнении (1). В результате перечисления можно указать основные 21 из них. Поэтому для уравнения (1) в области G ставится следующая задача:

Задача М. Требуется найти функцию $u\,(x,\,y)$, которая:

1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\backslash J_1\backslash J_2\backslash J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} и u_{yy} – непрерывны вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях;

2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\backslash J_1\backslash J_2\backslash J_3$;

3) удовлетворяет одну из групп краевых условий и условиям склеивания на линиях изменения типа, которые состоят из 16 краевых условий и 12 условий склеивания соответственно каждому случаю отдельно (здесь мы не смогли показать эти группы условий).

Замечание. В работах [1] и [2] были рассмотрены различные краевые задачи в смешанной области с одной или двумя характеристическими линиями изменения типа.

Литература

1. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа // Дифференциальные уравнения, 1986. Т.22, №1. С.25–31.

2. Apakov Yu.P., Mamajonov S.M. Solvability of a Boundary Value Problem for a Fourth Order Equation of Parabolic-Hyperbolic Type in a Pentagonal Domain // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021, 15 (4), pp. 586–596.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Маманазаров Д.С.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
d.mamanazarov@g.nsu.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости пространственно-нелокальных краевых задач с обобщенным условием Самарского-Ионкина для дифференциальных уравнений вида

$$u_t + (-1)^{p+1} D_x^{2p+1} u + c(x,t)u = f(x,t)$$

$D_x^k = \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}$, $p \geq 1$ целое, $x \in \Omega = (0,1), t \in (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные функции.

Целью работы является доказательство существования и единственности регулярных решений изучаемых задач - решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТИПА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЙ

Маматов Ж. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
z.mamatov@g.nsu.ru

Пусть t, a, x есть независимые переменные такие, что $t \in (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $a \in (0,A)$, $0 < A < +\infty$, $x \in (0,1)$. В области $Q = (0,1) \times (0,T) \times (0,A)$ рассматривается ультрапараболическое уравнение

$$u_t + u_a - u_{xx} + c(x,t,a)u = f(x,t,a)$$

здесь $c(x,t,a)$, $f(x,t,a)$ – заданные функции. Для этого уравнение изучается разрешимость нелокальных задач с условием интегрального виде по пространственной переменной.

Доказывается теоремы существования и единственности регулярных решений – решений, имеющие все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАНОГО ТИПА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Мамчуев М. О.[1], Зуннунов Р. Т.[2]

[1]Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия, mamchuev@rambler.ru;

[2]Институт математики им. В.И. Романоского АН РУз., Ташкент, Узбекистан, zunnunov@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (D_{0y}^{\alpha} + bD_{0y}^{\beta})u - u_{xx} + cu, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda^2 (-y)^m u, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha = 2\beta \in (0,1)$, b, c, λ, m – заданные действительные числа, $m > 0$, D_{0y}^{ν} – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка ν.

Пусть $\Omega = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y): \ x \in \mathbb{R}, \ 0 < y < T\}$, $AB = \{(x,y): 0 < x < 1, y = 0\}$, Ω_2 – часть полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком $\overline{AB}$ и характеристиками

$$AC: x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BC: x + [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$.

Задача T. Найти решение уравнения (1) в области Ω удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus AB,$$
$$u(x,y)\big|_{AC} = \psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

и условиям склеивания

$$\lim_{y\to 0+} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y) = \lim_{y\to 0-} u(x,y), \quad 0 < x < 1,$$
$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha} \left(D_{0y}^{\alpha} + bD_{0y}^{\beta}\right) u(x,y) = \lim_{y\to 0-} u_y(x,y), \quad 0 < x < 1,$$

где $\psi(x)$ – заданная функция.

Теорема 1. Пусть функция $\psi(x) \in C^3[0,1]$ представима в виде $\psi(x) = x\psi_0(x)$, $\psi_0(x) \in C[0,1]$, тогда существует решение $u(x,t)$ задачи T, такое, что

$$y^{1-\alpha} u(x,y) \in C(\overline{\Omega}_1), \quad u(x,y) \in C(\overline{\Omega}_2),$$
$$y^{1-\alpha} D_{0y}^{\alpha} u(x,y), y^{1-\alpha} D_{0y}^{\beta} u(x,y) \in C(\Omega_1 \cap AB),$$
$$u_{xx}(x,y) \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2), \quad u_{yy}(x,y) \in C(\Omega_2).$$

Если при этом $c \geq 0$, то решение задачи T единственно в классе функций, удовлетворяющих для некоторого $\sigma > 0$ условию

$$y^{1-\alpha} u(x,y) = O(\exp(\sigma |x|^{\varepsilon})), \quad \varepsilon = \frac{1}{1-\beta}, \quad y > 0, \quad |x| \to \infty.$$

BLOW-UP СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА С ИСТОЧНИКОМ

Матякубов А. С.[1], Раупов Д. Р.[2]

[1] Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
a.matyakubov@nuu.uz;

[2] Академия МЧС РУз, Ташкент, Узбекистан,
raupov.dilmurod@mail.ru

В данной работе изучается в области $Q = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in R\}$ blow-up свойства решений нелинейных параболических уравнений недивергентного вида с источником

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x}\right) + u^{q-1} \tag{1}$$

$$u|_{t=o} = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in R, \tag{2}$$

где $p > 2$, $\alpha > 1$, $q > 1$, $T < \infty$ – численные параметры, $u = u(t,x) \geq 0$ – искомые решения.

Используя теорему сравнения [1], не решая задачу, можно оценить решение сверху и снизу [2], что является весьма важным при исследовании свойств нелинейных задач [3].

В настоящей работе построены асимптотические представления автомодельных решений уравнения (1), найдены необходимые и достаточные признаки их существования, а также доказаны теоремы о верхних оценках blow-up решений.

Литература

1. Samarskii A.A. et al. Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations. Walter de Grueter, Berlin, 1995. №4. p 535.

2. Matyakubov A.S., Raupov D.R. Explicit estimate for blow-up solutions of nonlinear parabolic systems of non-divergence form with variable density // AIP Conference Proceedings. 2023. V.2781, I.1. 020055.

3. Matyakubov A.S., Raupov D.R. Numerical and visual modeling for blow-up modes in two-component nonlinear media // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2022. №2(39). 40-51.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕГО ТРЕТЬЮ ПРОИЗВОДНУЮ ПО ВРЕМЕНИ, В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Меликузиева Д. М.

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
meliquziyevadilshoda@gmail.com

В области $D^- = \{(x, y): \quad 0 < x < p, \quad -\infty < y < 0\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, \tag{1}$$

где $p > 0$ действительное число, и для него исследуем следующую задачу.

Задача A**.** Найти решение уравнения (1) в области D^- из класса $u(x, y) \in C^{4,3}_{x,y}(D^-) \cap C^{3,2}_{x,y}(D^- \cup \Gamma)$, имеющее ограниченную третью производную по x и вторую производную по y при $y \to -\infty$, равномерно по x и $u_{xx} \in L_2(D^-)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(0, y) = u(p, y) = u_{xx}(0, y) = u_{xx}(p, y) = 0, \quad -\infty < y \leq 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad \lim_{y \to -\infty} u(x, y) = \lim_{y \to -\infty} u_y(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \tag{3}$$

где $\Gamma = \partial D^-$ граница области D^-, $\psi(x) \in C^8[0, p]$ – заданная функция, причем

$$\psi^{(k)}(0) = \psi^{(k)}(p) = 0, \quad k = \overline{0, 4}. \tag{4}$$

Теорема. Если задача A имеет решение, то оно единственно.

Теорема доказана методом интегралов энергии. Используя метода Фурье решение задачи A построена в виде бесконечного ряда. Доказаны, что ряд и его производные u_{xxxx} , u_{yyy} сходится абсолютно и равномерно. При обосновании равномерной сходимости установлено отличие от нуля "малого знаменателя".

Литература

1. Апаков Ю.П., Меликузиева Д.М. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. Вестник. НамГУ, 2022. -5.-Ст.82-91.

2. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a problem for a fourth-order with multiple characteristics containing the third time derivate. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023. Vol. 44, №. 8, pp.3218-3224. DOI:10.1134/S1995080223080061.

3. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time. Bulletin of the Karaganda University.Mathematics Series, 2023. №.4(112), pp.30-40. DOI:10.31489/2023M4/30-40

ЗАДАЧА С АНАЛОГОМ УСЛОВИЯ ФРАНКЛЯ

Мирсабурова Д., Курбонназарова М.
Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан
dmirsaburova@mail.ru.

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup J$ -неограниченная область, комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где D^+-полуплоскость $y > 0$, D^-– конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \qquad (1)$$

исходящей из точек $A(-1,0)$ и $B(1,0)$ прямой $y = 0$, $J = (-1,1)$– интервал оси $y = 0$.

Введем обозначения:

$$J_1 = \{(x,y) : -\infty < x < -1,\ y = 0\};\ J_2 = \{(x,y) : 1 < x < +\infty,\ y = 0\},$$

$C_0(C_1)$ -точки пересечения характеристик $AC(BC)$ с характеристиками, исходящими из точки $E(c,0)$, где произвольное фиксированное число $c \in J$.

Пусть $p(x) = ax - b$ и $q(x) = a - bx$ линейные диффеоморфизмы из множества точек отрезка $[-1,1]$ во множество точек отрезков $[-1,c]$ и $[c,1]$, соответственно, где $a = (1+c)/2,\ b = (1-c)/2$, причем $p(-1) = -1,\ p(1) = c,\ q(-1) = 1,\ q(1) = c$.

Задача JNF. В области D найти функцию $u(x,y)$, со следующими условиями:

1) $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D_R}$ неограниченной области D;

2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 (определение класса R_1 см.ниже) в области D^-;

4) на интервале вырождения J имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y},\ x \in J.$$

5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to +\infty} u(x,y) = 0,\ y \geq 0,$$

где $R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,+0) = \tau_1(x),\ x \in \overline{J_1};\ u(x,+0) = \tau_2(x),\ x \in \overline{J_2},$$

$$\mu_0(x)(1+x)^{\alpha} D^{1-\beta}_{-1,x} u\left[\theta_0(p(x))\right] + \mu_1(x)(1+x)^{\beta} D^{1-\alpha}_{-1,x} u\left[\theta_1(q(x))\right] = \psi(x),\ x \in J;$$

$$u(p(x),0) - u(q(x),0) = f(x),\ x \in \overline{J},$$

где $D^{l}_{-1,x}$- оператор дифференцирования дробного порядка,

Задача JNF исследуется методом работы [1]

Литература

1. Мирсабуров М. Задача с аналогом условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом. // Дифференциальные уравнения. 2017, том 53 №6, С.778-788.

КОМБИНИРОВАННАЯ ЗАДАЧА С ЛОКАЛЬНЫМИ И НЕЛОКАЛНЫМИ УСЛОВИЯМИ И С ОБЩИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Мирсабуров М., Амонов Б.

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан
mirsaburov@mail.ru.

Пусть Ω – конечная односвязная область комплексной плоскости $C = \{z = x+iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой σ_0 с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$ заданной уравнением $x^2 + 4(m + 2)^{-2}y^{(m+2)} = 1$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \qquad (1)$$

где постоянные $m > 0$, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$.

Задача ТЖНК . Требуется найти в области Ω функцию $u(x, y)$ удевлетворяюшую следуюшим условиям:

1. Функция $u(x, y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\overline{\Omega^+}$ и $\overline{\Omega^-}$;

2. Функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3. Функция $u(x, y)$ является обобшенным решением класса R_1 в области Ω^-;

4. На интервале вырождения AB выполняются обшие условия сопряжения

$$u(x, -0) = \lambda_1(x)u(x, +0) + \lambda_0(x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \mu_1(x)\lim_{y\to +0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} + \mu_0(x),\ x \in (-1, 1)/\{c\}, \qquad (2)$$

приччм пределы в (2) при $x = \pm 1$, $x = c$ могуть имееть особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m + 2) \in (0, 1/2)$.

5. Выполнены условия

$$u(x, y)\big|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$u(x, y)\big|_{AC_0} = \psi(x), \quad x \in [-1, (c - 1)/2],$$

$$a_0(x)(x - c)^\beta D_{c,x}^{1-\beta} u[\theta^*(x)] + b_0(x)(1 - x)^\beta D_{x,1}^{1-\beta} u[\theta_1(x)] = c_0(x), \quad x \in (c, 1),$$

где $D_{c,x}^{1-\beta}$ $D_{x,1}^{1-\beta}$ – операторы дифференцирования дробного порядка $1-\beta$, $\theta^*(x)$ и $\theta_1(x)$ соответственно аффиксы точек пересечения характеристик EC_1 и BC_1 с характеристиками исходяшей из точки $M(x_0, 0)$, $x_0 \in [c, 1]$:

Задача исследуется методом работы [1]

Литература

1. Мирсабуров М., Мирсабурова Г. Задача Трикоми–Нахушева// *Дифференц. уравнения.* 2012, том 48, №1. –С. 54–63.

ЗАДАЧА С АНАЛОГОМ УСЛОВИЯ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО НА ОТРЕЗКЕ ВЫРОЖДЕНИЯ И ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ЕМУ ВНУТРЕННЕМ ОТРЕЗКЕ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Мирсабуров М., Маматмуминов Д. Т.

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан
mirsaburov@mail.ru, dilshod310797mdt@mail.ru

Пусть $D-$ конечная односвязная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси $y = 0$, характеристиками AC и BC уравнения

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянная $m > 0, A = A(-1, 0), B = B(1, 0)$.

На отрезке AB рассмотрим точку $E = E(c, 0)$, где $c \in I = (-1, 1)-$ интервал оси $y = 0$, и введем линейную функцию $y = q(x) = ax - b$, отображающую отрезок $[-1.1]$ на отрезок $[-1, c]$ где $a = (1 + c)/2, b = (1 - c)/2$, причем $q(-1) = -1, q(1) = c$.

Обозначим через

$$\omega(q(x)) = ax_0 - i\eta \tag{2}$$

аффикс точки пересечения характеристики $x - (2/(m + 2))(-y)^{(m+2)/2} = q(x_0)$ с прямой $y = -\eta$. Здесь $-\eta = -(b(m + 2)/2)^{2(m+2)}-$ ордината точка пересечения характеристики $x - (2/(m + 2))(-y)^{(m+2)/2} = c$, исходящей из точки $E(c, 0)$, с граничной характеристикой BC. Отметим что $\omega(q(x_0))$ биективно отображает отрезок AB оси $y = 0$ на отрезок A_0B_0 прямой $y = -\eta$, где $A_0(-a, -\eta) \in AC, B_0(b, -\eta) \in BC$.

Задача BS. В области D найти регулярное решение $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in [-1, 1]; \tag{3}$$

$$u(x, 0) = \mu u[\omega(q(x))] + \rho(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{4}$$

где $\mu-$ некоторая положительная постоянная, $\nu(x), \rho(x) \in C^2(\bar{I})-$ заданные функции, $u[\omega(q(x))] = u(Re\omega(q(x)), Im\omega(q(x)))$ [1],[2].

Теорема 1. *Задача BS при выполнении условия $\mu < 1$, однозначна разрешима.*

Однозначная разрешимость задачи доказана комбинированным методом последовательных приближений и итераций.

Литература

1. Бицадзе А.В.,Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. **4**(185), 739-740. (1969.)

2. Мирсабурова Г. М. Задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений// Известия вузов. Математика **6**, 54-59. (2022).

БАЗИС ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ ИНВАРИАНТОВ ГАЛИЛЕЕВО - СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Муминов К.К.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
m.muminov@rambler.ru

Галилеево-симплектическая группа $\Gamma Sp(2n,\mathbb{R}) \subset GL(2n,\mathbb{R})$ есть подгруппа всех таких линейных преобразований $g = (g_{i,j})_{i,j=1}^{2n} \in GL(2n,\mathbb{R})$, для которых $g_{1,1} = \pm 1$, $g_{2n,2n} = \pm 1$, а $(g_{i,j})_{i,j=2}^{2n-1} \in Sp(2n-2,\mathbb{R})$, где $Sp(2n-2,\mathbb{R})$ - симплектическая группа обратимых линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n-2}$.

Производной r-го порядка от пути $x(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^{2n}$ называют вектор-функцию $x^{(r)}(t) = \{x_i^{(r)}(t)\}_{i=1}^{2n}$, где $x_i^{(r)}(t)$ - r-ая производная координатной функции $x_i(t)$, $i = 1,\ldots,2n$, $r \in \mathbb{N}$.

Для пути $x = x(t)$ рассмотрим кольцо $R\{x\} = R\{x_1,\ldots,x_{2n}\}$ всех многочленов от счетного числа переменных $x_1(t),\ldots,x_{2n}(t), x_1^{(1)}(t),\ldots,x_{2n}^{(1)}(t),\ldots,x_1^{(r)}(t),\ldots,x_{2n}^{(r)}(t),\ldots$, и положим $d\left(x_i^{(r)}(t)\right) = x_i^{(r+1)}(t)$. Ясно, что d однозначно продолжается до дифференцирования в кольце $R\{x\}$, наделяя это кольцо структурой дифференциального кольца (d-кольца).

Известно, что дифференцирование d на $R\{x\}$ единственным образом продолжается до дифференцирования на соответствующее поле частных. Это поле называют d-полем и обозначают его через $R\langle x\rangle = R\langle x_1,\ldots,x_{2n}\rangle$. Элементы этого поля называют d-рациональными функциями, и их записывают в виде $f\langle x\rangle = f\langle x_1,\ldots,x_{2n}\rangle$, где $x = (x_1,\ldots,x_{2n})$ есть $2n$-мерный переменный вектор. Действие группы $G \subset GL(2n,\mathbb{R})$ на $2n$-мерный переменный вектор x и его производные $x^{(r)}$ определяется как умножение $x^{(r)}$ слева на матрицу $g \in G$: $g \cdot x^{(r)}$, где $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. d-Рациональная функция $f\langle x\rangle$ называется G-инвариантной, если $f\langle gx\rangle = f\langle x\rangle$ при любом $g \in G$. Известно, что множество $R\langle x\rangle^G$ всех G-инвариантных d-рациональных функций является дифференциальным полем относительно дифференцирования, индуцированного из $R\langle x\rangle$.

Подмножество L элементов d-поля $R\langle x\rangle^G$ называют d-алгебраически независимым, если любое конечное подмножество из L является d-алгебраически независимым. Любое максимальное d-алгебраически независимое множество элементов d-поля $R\langle x\rangle^G$ называют базисом трансцендентности d-поля $R\langle x\rangle^G$. В силу леммы Цорна, в d-поле $R\langle x\rangle^G$ всегда существует базис трансцендентности. Известно, что все базисы трансцендентности в d-поле $R\langle x\rangle^G$ имеют одну и ту же мощность. Общее кардинальное число различных базисов трансцендентности d-поля $R\langle x\rangle^G$ называется степенью трансцендентности $R\langle x\rangle^G$.

Следующая теорема дает описание одного из базисов трансцендентности d-поля $R\langle x\rangle^G$ для галилеево-симплектической группы $G = \Gamma Sp(2n,\mathbb{R})$.

Теорема. Конечный базис трансцендентности дифференциального поля $R\langle x\rangle^{\Gamma Sp(2n,\mathbb{R})}$ со степенью трансцендентности, равной $2n$, образуют многочлены:

$$f_1(x) = x_1; \quad f_2(x) = x_{2n};$$

$$f_k(x) = \sum_{i=2}^{2n-2} \left(x_i^{(k-1)} x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} x_{i+1}^{(k-1)} \right), \quad k = 1,\ldots,2n-2.$$

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИИ СМЕШАННОГО ТИПА

Муминов С. Ф.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент.
maximum@umail.uz

Рассмотрим уравнение

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} U_{xx} - U_y, & y \geq 0 \quad y > 0 \\ (-y)^m U_{xx} - U_{yy} & y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Пусть область D состоит из части D^+ ограниченной отрезками AB, B_0B, A_0B_0 и AA_0 прямых $y = 0; x = 1; y = y_0; x = 0$ и части D^- ограниченной характеристиками уравнения (1) AC и BC при $y < 0$.

Задача. Найти функцию $u(x, y)$ обладающую следующими свойствами:
$U(x, y) \in C^2(\overline{D})$;

производные U_x и U_y, непрерывны вплоть до отрезка AB ;

$U(x, y)$ является в D^+ классическим решением уравнения (1), а в D^- обобщенным решением уравнения (1) класса R_2 ;

удовлетворяет условию склеивания

$$\frac{\partial u\,(x, +0)}{\partial y} = \frac{\partial u\,(x, -0)}{\partial y} = V(x), \quad 0 < x < 1$$
$$U\,(x, +0) = U\,(x, -0) = \tau(x), \quad 0 < x < 1;$$

и краевым условиям

$$U(0, y) = \vartheta_0(y) \quad 0 \leq y \leq y_0$$
$$\left[\gamma_2(y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \beta_2(y)U(x, y)\right]\Bigg|_{x=1} + \delta(y) = \left[\gamma_{1(y)}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \beta_1(y)U(x, y)\right]\Bigg|_{x=1},$$
$$U(x, y)|_{AC} = \varsigma(y), \quad -\frac{1}{2} \leq y < 0,$$

также условию согласования $\vartheta_0(0) = \varsigma(0)$, где y_0 – любая фиксированная точка интервала $(0, 1)$, а $\vartheta_0(y)$, $\gamma_1(y)$, $\gamma_2(y)$, $\beta_1(y)$, $\beta_2(y)$, $\delta(y)$ – заданные функции, непрерывные в замыкании области их определения, причем

$$\beta_2(y) \neq 0, \varsigma(y) \in C\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cap C^2\left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Муминов З. М.

Ферганский областной национальный центр обучения педагогов новым методикам, Фергана, Узбекистан,
zaylobiddinmuminov@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} L_c u = 0, \tag{1}$$

в смешанной области D ограниченной отрезками $A\,(0,0)\,B\,(1,0)$, $B\,(1,0)\,B_0\,(1,1)$, $B_0\,(1,1)\,A_0\,(0,1)$ прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$ и характеристиками $AC : x+y=0$, $A_0C : y-x=1$ уравнения $u_{xx}-u_{yy}=0$, пересекающимися в точке $C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, где

$$D = D_1 \cup AA_0 \cup D_2, \quad AA_0 = \{(x,y) : x=0,\ 0<y<1\},$$

$$D_1 = \{(x,y) : 0<x<1,\ \ 0<y<1\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y) : -\frac{1}{2} < x < 0,\ \ -x < y < 1+x\right\};$$

$$L_c u = \begin{cases} u_{xx} - u_y + c_1 u, & D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - c_2 u, & D_2. \end{cases}$$

ЗадачаD. Требуется определить функцию со следующими свойствами:
1) она непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;
2) является регулярным решением уравнения (1) в области D при $x \neq 0$;
3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1,y) = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le 1, \ \ u(x,0) = f_1(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$u_y(x,0) = f_2(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad u|_{AC} = \psi_1(y), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(y), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2},$$

а также функция $u(x,y)$ и ее первые производные удовлетворяют на отрезке AA_0 непрерывным условиям склеивания.

Здесь $n-$ внутренняя нормаль к A_0C, а $\varphi_1(y),\ f_i(x),\ \psi_i(y)\ (i=\overline{1,2})-$ заданные достаточно гладкие функции.

Доказательство существования и единственности поставленной задачи D проводится путем построения решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. 1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа. Т.: Фан, 1986, 220 с.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОГО ПРИМЕРА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Мухсинов Е.М.[1], Набиева М. Ш.[2]

[1]Таджикский государственный университет право, бизнеса и политики, Худжанд, yodgor.mukhsinov@gmail.com;

[2]Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова, Таджикистан, manzura.nabieva.2014@mail.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости задачи преследования в смысле Л.С.Понтрягина [1, с. 308] для контрольного примера с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве E, когда динамика дифференциальной игры описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Bz\,(t-h) + Az\,(t) - u + \vartheta,$$

где

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} I, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} I,$$

$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vartheta \end{pmatrix}$, $||u|| \leq c$, $||\vartheta|| \leq d$, $k \geq 0$, $h \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, и терминальным множеством

$$M = \{z : z_1 = 0\}\,.$$

При соответсвующих предположениях доказана теорема о возможности преследования из любой точки за оптимальное время.

Замечание. Когда $E = R^n, n \geq 2, k = 0,\ c > d$ и $\frac{c}{\alpha} > \frac{d}{\beta}$ из доказанной теоремы следует классический результат Л.С. Понтрягина [1, с. 328].

Литература

1. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования. Математической сборник. 1980, т.112, №154 с.307-331.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОГО ПРИМЕРА НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Мухсинов Е.М.[1], Назаров Б. Р.[2]

[1]Таджикский государственный университет право, бизнеса и политики, Худжанд,
yodgor.mukhsinov@gmail.com;

[2]Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова,
Таджикистан,
nazarovbachtovar@gmail.com

В данной работе рассматривается разрешимость задачи преследования в смысле Л.С. Понтрягина [1, с. 308] для контрольного примера нейтрального типа в банаховом пространстве E, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = B\dot{z}\,(t-h) + Az\,(t) - u + v,$$

где

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{I}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}\mathrm{I},$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -\overline{u} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{v} \end{pmatrix}, ||\overline{u}|| \le c, \quad ||\overline{v}|| \le d, \quad k \ge 0, \quad h \ge 0, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

и терминальным множеством

$$M = \{z : z_1 = 0\}.$$

При соответсвующих предположениях доказана теорема о возможности преследования из любой точки за оптимальное время.

Замечание. Из доказанной теоремы следует классический результат Л.С. Понтрягина [1, с. 328], если $E = R^m, \quad m \ge 2, \quad k = 0$.

Литература

1. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования.// Математический сборник. 1980, т. 112(154), №3(7). –С. 307–331.

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ХИРОТЫ-МАКСВЕЛЛА-БЛОХА

Мырзакулова Ж. Р.
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан,
zhrmyrzakulova@gmail.com

Рассмотрим нелокальную систему Хироты-Максвелла-Блоха (Х-МБ), которая задается уравнениями

$$q_x(x,t) = \beta\left(q_{ttt}(x,t) - 6\kappa q(x,t)q^*(x,-t)q_t(x,t)\right) + \\ +\frac{i}{2}\alpha\left(q_{tt}(x,t) - 2\kappa q^2(x,t)q^*(x,-t)\right) - 2\kappa p(x,t), \quad (1)$$

$$p_t(x,t) = -2\kappa q(x,t)\eta(x,t) + 2i\omega p(x,t), \quad (2)$$

$$\eta_t(x,t) = -p(x,t)q^*(x,-t) + p^*(x,-t)q(x,t). \quad (3)$$

где функции $q(x,t)$, $p(x,t)$ являются комплексными, а функция $\eta(x,t)$ Ч вещественная. Константы α и β Ч комплексные. Вещественный параметр ω является константой, соответствующей частоте, а символ $*$ обозначает комплексное сопряжение. Нелокальность системы обусловлена симметриями обратного времени и сопряжения, что выражается в условиях $r(x,t) = \sigma q^*(x,-t), \quad m(x,t) = \delta p^*(x,-t)$

Для нахождения решений системы использовано преобразование Дарбу. Применяя преобразование вида

$$\phi' = T\phi, \quad (4)$$

где T – Дарбу-матрица, определяемая как $T = \lambda A - S$, с матрицами A и S

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Получаем новым решениям нелокальной системы Х-МБ в следующем виде

$$q'(x,t) = \frac{a_{11}(x,t)}{a_{22}(x,t)}q(x,t) - \frac{2is_{12}}{a_{22}}, \quad (6)$$

$$q'^*(x,-t) = \frac{a_{22}}{a_{11}}q^*(x,-t) + \frac{2is_{21}}{a_{11}}. \quad (7)$$

Таким образом, преобразование Дарбу позволяет генерировать мультисолитонные решения и исследовать их поведение в нелокальных интегрируемых системах. Работа демонстрирует, как применение Дарбу-преобразований к системе Х-МБ способствует получению точных аналитических решений, подтверждающих ее интегрируемость и солитонную структуру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable nonlocal nonlinear Schreodinger equation // Phys. Rev. Lett. 2013. №110. P. 064105.
2. Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable nonlocal nonlinear equations, // Stud. Appl. 2016. №139. P. 7–59.
3. An L., Li C., Zhang L. Darboux transformations and solutions of nonlocal Hirota and Maxwell-Bloch equations // Stud Appl Math. 2021. №147. P. 60–83.

ЗАДАЧА С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Насирова Д.А.

Ташкентский государственный технический университет, Узбекистан, г.Ташкент,
E-mail: ndildora0909@gmail.com

Многие, весьма важные задачи математической физики и биологии, особенно задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод, моделировании процессов переноса частиц, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, моделировании фильтрации жидкости в пористых средах, исследовании обратных задач, решение многих задач оптимального управления агроэкосистемой, приводят к краевым задачам для нагруженных уравнений с частными производными.

Термин "нагруженное уравнение" впервые появился в работе Н.М.Гюнтера и А.Ш.Габиб-заде. Принятое сейчас в научной литературе общее определение нагруженных уравнений было дано в 1976 году А.М. Нахушевым. В работе [1], которого дано наиболее общее определение и подробная классификация различных нагруженных уравнений: нагруженных дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, функциональных уравнений, а также их многочисленные приложения.

В настоящее время круг рассматриваемых задач для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа первого рода исследовались сравнительно мало. Отметим работы А.М. Нахушева, Б.Исломова и Ф.Джураева, Р.Р. Ашурова и С.З. Жамалова.

Однако, несмотря на имеющиеся многочисленные работы по краевым задачам для смешанных уравнений, до сих пор остается не исследованные локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений параболо – гиперболического типа второго рода.

Настоящая работа посвящена постановке и исследованию локальной краевой задачи с разрывными условиями склеивания для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа второго рода, когда нагруженная часть содержит интегральный оператор дробного порядка вида

$$0=\begin{cases} u_{xx}-x^{p}u_{y}-\mu_1 D_{0x}^{-\alpha_1}u\left(x,0\right), & x>0,\ \ y>0,\\ u_{xx}-\left(-y\right)^{m}u_{yy}+\mu_2 D_{0x}^{-\alpha_2}u\left(x,0\right), & x>0,\ \ y<0,\end{cases}$$

где m, p, μ_1, μ_2- любые действительные числа, причем

$$0<m<1, p>0,\ 0<\alpha_1,\alpha_2<1, \mu_1>0, \mu_2<0,$$

а $D_{0x}^{-\alpha}f(x)-$ интегральный оператор дробного порядка α в смысле Римана - Лиувилля.

Литература

1. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. // Дифференциальные уравнения. 1976. **12**(1). С. 103-108.

ПОРОГОВОЕ СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА В НЕЦЕЛОЧИСЛЕННОМ РЕШЕТКЕ

Неъматова Ш. Б.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,
sh.b.nematova@buxdu.uz

Для каждого фиксированного $h > 0$ через $\mathbb{T}_h^3$ обозначим куб $(-\pi/h;\pi/h]^3$ - с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $L^2(\mathbb{T}_h^3)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}_h^3$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 := L^2(\mathbb{T}_h^3)$, т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

При каждом фиксированном $h > 0$ введем семейства обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_h(k)$, $k \in \mathbb{T}_h^3$, действующую в $\mathcal{H}$ по правилу

$$\mathcal{A}_h(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(h;k) & A_{01}(h) \\ A_{01}^*(h) & A_{11}(h;k) \end{pmatrix},$$

где операторы $A_{ii}(h;k) : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 0,1$ и $A_{01}(h) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$ определяются по правилам

$$A_{00}(h;k)f_0 = (l_2\varepsilon_h(k) + 1)f_0, \quad A_{01}(h)f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{T}_h^3} v_h(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}(h;k)f_1)(p) = E_h(k;p)f_1(p), \quad E_h(k;p) := l_1\varepsilon_h(p) + l_2\varepsilon_h(k-p).$$

Здесь l_1, l_2-вещественные положительные числа. при каждом фиксированном $h > 0$ функция $v_h(\cdot)$ вещественнозначная ограниченная функция на $\mathbb{T}_h^3$, а функция $\varepsilon_h(\cdot)$ имеет вид:

$$\varepsilon_h(k) := \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{3}(1-\cos(hk_i)),\ k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{T}_h^3.$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{A}_h(k)$ ограничен и самосопряжен в $\mathcal{H}$.

При каждом фиксированном $k \in \mathbb{T}_h^3$ определим регулярную в $\mathbb{C}\setminus\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_h(k))$ функцию

$$\Delta_h(k\,;z) := l_2\varepsilon_h(k) + 1 - z - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}_h^3}\frac{v_h^2(t)dt}{E_h(k;t)-z}.$$

Обычно $\Delta_h(k\,;\cdot)$ называется детерминантом Фредгольма, ассоциированный с оператором $\mathcal{A}_h(k)$.

Для формулировки основного результата данной работы предположим, что все частные производные второго порядка функции $v_h(\cdot)$ непрерывны в $\mathbb{T}_h^3$ и положим $\mathbf{0} := (0,0,0) \in \mathbb{T}_h^3$.

Теорема 1. Оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда $\Delta_h(\mathbf{0}\,;0) = 0$ и $v_h(\mathbf{0}) = 0$.

Теорема 1 играет важную роль при изучение конечности числа собственных значений соответствующий 3×3 операторной матрицы, для случая $h = 1$ см.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Нортошев Д. Г.[1], **Кожанов А.И.**[1,2]
[1]Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия
d.nortoshev@g.nsu.ru
[2]Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
kozhanov@g.nsc.ru

В докладе представлены результаты о разрешимости краевых задач с нелокальными условиямидля для псевдогиперболических уравнений.

$$u_{tt} - a\Delta u_{tt} - b\Delta u = f\left(x, t\right), \tag{1}$$

$$u\left(x, 0\right) = \alpha u\left(x, T\right), \ \gamma u_t\left(x, 0\right) = \beta u_t\left(x, T\right), \ u|_S = 0,$$

где $S = \Gamma \times [0,\, T]$, $\gamma^2 + \beta^2 > 0$, a, b, α, β, γ–заданные действительные числа.

Здесь x принадлежит ограниченной области Ω из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Г. Для изучаемых задач получены теоремы единственности и существования регулярных решений т.е. решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные входящие в соответствующее уравнение.

Разнее краевые(локальные) задачи для уравнений (1) изучались в работах [1]-[4]

Литература

1. Г.В. Демиденко, С.В. Успенский Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной Псевдогиперболические уравнения, 1998. С.108–121.

2. С.Я. Якубов Линейные дифференциально–операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

3. А.А. Замышляева Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска-Лява, Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование, 2011, №10, 22–29.

4. А.А. Замышляева, А.В. Юзеева Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска-Лява, Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование, 2010, №5, 23–31.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Окбоев А. Б.

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Наманган, Узбекистан, akmaljon12012@gmail.com

Рассмотрим волновой оператор дробного порядка

$$\left(\Box_a{}^{\alpha} u\right)(x,t) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha} u\,(x,t)\,,$$

где a и α – действительные числа, причем $\alpha = n + \alpha_0 - 1$, $0 < \alpha_0 < 1$, $n \in N$,

$$\left(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha} u\,(x,t) = \left(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{n+\alpha_0-1} u\,(x,t) =$$
$$= \tfrac{\left(4a^2\right)^{\alpha_0-1}}{\Gamma^2(1-\alpha_0)}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{n}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0} d\xi \int\limits_{\xi}^{\eta_0}(\eta_0-\eta)^{-\alpha_0}(\xi-\xi_0)^{-\alpha_0}u\left(\tfrac{\eta+\xi}{2},\,\tfrac{\eta-\xi}{2a}\right)d\eta,$$

$\xi_0 = x - at$, $\eta_0 = x + at$, $\Gamma\,(\alpha)$ – Гамма-функция.

Пусть $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, рассмотрим в области $\Omega = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ следующее уравнение:

$$(\Box_a^{\alpha} u)(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где $f\,(x,t)$ – заданная функция.

Задача Коши. Найти в области Ω решение $u(x,t) \in C(\Omega)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to+0} t^{2-2\alpha}u(x,t) = \varphi_1(x), \quad \lim_{t\to+0}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{2-2\alpha}u(x,t)\right] = \psi_1(x) \tag{2}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ – заданные функции.

Теорема. Если $\varphi\,(x) \in C^2\,(\mathbb{R})$, $\psi\,(x) \in C^1\,(\mathbb{R})$ и $f\,(x,t) \in C^2\,(\Omega)$, то функция

$$u\,(x,t) = \frac{(2a)^{2-2\alpha}}{\Gamma^2\,(\alpha)\,\Gamma\,(3-2\alpha)}\frac{\partial}{\partial\eta_0}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}(\eta_0-\eta_1)^{\alpha-1}(\eta_1-\xi_0)^{\alpha-1}\varphi_1\,(\eta_1)\,d\eta_1+$$

$$+\frac{(2a)^{2-2\alpha}}{2\Gamma^2\,(\alpha)\,\Gamma\,(3-2\alpha)}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}(\xi_1-\xi_0)^{\alpha-1}(\eta_0-\xi_1)^{\alpha-1}\varphi_1{}'\,(\xi_1)\,d\xi_1-$$

$$-(2a)^{1-2\alpha}\frac{\Gamma\,(2\alpha)}{\Gamma^2\,(\alpha)}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}(\xi_1-\xi_0)^{\alpha-1}(\eta_0-\xi_1)^{\alpha-1}\,\psi_1\,(\xi_1)\,d\xi_1+$$

$$+\frac{1}{2(2a^2)^{\alpha}\Gamma^2\,(\alpha)}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}d\xi_1\int\limits_{\xi_1}^{\eta_0}(\eta_0-\eta_1)^{\alpha-1}(\xi_1-\xi_0)^{\alpha-1}f\left(\frac{\eta_1+\xi_1}{2},\,\frac{\eta_1+\xi_1}{2a}\right)d\eta_1$$

является единственным решением задачи Коши.

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Олисаев Э. Г.

Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова,
Владикавказ, Россия,
eolisaev@yandex.ru;

В работе рассматривается нелокальная краевая задача для одномерного дифференциального уравнения параболического типа с вырождением. Слагаемое в уравнении, содержащее интеграл искомой функции, описывает эффект памяти о предыдущих состояниях моделируемой системы системы.

В предположении существования достаточно гладкого решения рассматриваемой задачи, получена априорная оценка, из которой следует единственность решения задачи и устойчивость относительно начальных данных и правых частей уравнения и нелокального условия.

Постановка задачи.

В замкнутой области $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \int\limits_0^t p(x,t,\tau)u(x,t)d\tau + f, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l x^m u(x,t)dx = \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $m = 1, 2, c_1 < k(x,t) \leqslant c_2$, $|r(x,t), r_x(x,t), k_x(x,t), p(x,t,\tau)| \leqslant c_3$.

Для решения задачи (1)–(4) методом энергетических неравенств, используя методики из [1], [2] получена априорная оценка

$$\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|_0^2 + \left\|x^{\frac{m}{2}}u_x\right\|_{2,Q_t}^2 \leq M\left(\left\|x^{\frac{m}{2}}f\right\|_{2,Q_t}^2 + \left\|x^{\frac{m}{2}}u_0\right\|_0^2 + \int\limits_0^t \mu_1^2(\tau)d\tau\right), \tag{5}$$

где M – константа, зависящая только от размеров области Q_T.

Из оценки (5) следует единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи (1) – (4) .

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983, 616 с.

2. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, – 407 с.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ, ВКЛЮЧАЮЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Омариева Д. А.[1], Байгереев Д. Р.[2]

[1]Восточно-Казахстанский технический университет им.Д.Серикбаева, г.Усть-Каменогорск, Казахстан,
e-mail: Dinara_2205@mail.ru;

[2]Восточно-Казахстанский университет им.С.Аманжолова, г.Усть-Каменогорск, Казахстан,
e-mail: dbaigereyev@gmail.com

В данной работе предлагается эффективный численный метод решения начально-краевой задачи для связанной системы уравнений из [1], состоящей из нелинейного параболического уравнения в частных интегро-дифференциалах и эллиптического уравнения с нелинейным членом.

Данный доклад имеет важное прикладное значение в нефтегазовой технике и находит применение при моделировании течений двухфазной неравновесной жидкости в пористой среде с обобщенным законом неравновесности [2-4]. Построение численного метода основано на использовании метода конечных элементов в пространственном направлении и конечно-разностной аппроксимации производной по времени. Метод Ньютона и формула аппроксимации второго порядка применяются для нелинейных членов. Строго доказаны устойчивость и сходимость дискретной схемы, а также сходимость итерационного процесса. Численные тесты проводятся для подтверждения теоретического анализа. Построенный метод применен для исследования двухфазного неравновесного течения несжимаемой жидкости в пористой среде. Кроме того, приводятся два примера моделей, позволяющих прогнозировать поведение потока жидкости в пористой среде, которые сводятся к решению нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.

Литература

1. Yermagambetov, T.K. Algorithm for Numerical Implementation of a Filtration Model with a Generalized Nonequilibrium Law. Proc. Natl. Acad. Sci. Repub. Kazakhstan Phys.-Math. Ser. 2010, 2, 94–96.

2. Ferreira, J.A.; Pinto, L. An Integro-Differential Model for Non-Fickian Tracer Transport in Porous Media //Validation and Numerical Simulation. Math. Methods Appl. Sci. 2015, 39, 4736–4749.

3. Gazizov, R.K.; Lukaschuk, S.Y. Fractional-Differential Approach to Modeling Filtration Processes in Complex Inhomogeneous Porous Media //Vestnik UGATU . 2017, 21, 104–112 (in Russian).

4. Zhou, H.W.; Yang, S.; Zhang, S.Q. Modeling Non-Darcian Flow and Solute Transport in Porous Media with the CaputoЦFabrizio Derivative //Appl. Math. Model. 2019, 68, 603–615.

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Орумбаева Н. Т., Манат А. М., Агатаева А. А.

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

aluamanat5@gmail.com

На $\Omega = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = f\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right), \quad (x,t) \in \Omega, \quad u \in R, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

$$b_1(x)\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x^2} + b_2(x)\frac{\partial^2 u(x,T)}{\partial x^2} + b_3(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + b_4(x)\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} +$$
$$+ b_5(x)u(x,0) + b_6(x)u(x,T) = \theta(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{4}$$

где $f : \Omega \times R \times R \times R \to R$ непрерывна, функции $\theta(x)$, $b_j(x), j = \overline{1,6}$ непрерывны на $[0, \omega]$, функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на $[0, T]$.

С помощью замены переменных рассматриваемая задача сводится к нелокальной краевой задаче для семейства нелинейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений. Для решения полученной задачи применяется метод параметризации, который был предложен в работах Д.С.Джумабаева [1] для решения двухточечной краевой задачи обыкновенного дифференциального уравнения.

Ранее данный метод был применен для нахождения решения полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений со смешанной производной второго порядка [2].

В сообщении получены условия разрешимости нелокальной краевой задачи для нелинейного псевдопараболического уравения третьего порядка.

Данное исследование поддержано грантом №AP23488729 Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан.

Литература

1. Asanova A. T., Dzhumabaev D. S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 402:1 (2013), 167-178

2. Manat A.M., Orumbayeva N.T. On one approximate solution of a nonlocal boundary value problem for the Benjamin-Bon-Mahoney equation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. Volume 110. Issue 2. Page 84-92.

3. Orumbayeva N. T., Sabitbekova G. A. boundary value problem for nonlinear differential equation with arbitrary functions // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. Volume 85. Issue 1. Page 71-76.

НЕЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Оспанов К. Н.[1], Молдагали Е. О.[2], Р.Д. Ахметкалиева Р. Д.[3]

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
[1]kordan.ospanov@gmail.com; [2]yerka2998@gmail.com; [3]raya_84@mail.ru

В работе изучается следующее нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$-y^{'''} + r(x,y)y^{'} + q(x,y)y = F(x), \tag{1}$$

$x \in R = (-\infty, \infty)$, $F \in L_2(R)$. Мы предполагаем, что $r(x,y)$ и $q(x,y)$ – гладкие функции.

Дифференциальные уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами имеют большое практическое значение. Они моделируют реальные процессы в гидромеханике, электродинамике, физике жидкой среды, динамике распространения волн и многих других смежных областях. Краевые задачи для этих уравнений изучались во ряде работ, полученные результаты и разработанные методы исследования систематизированы (см. например, [1]).

Уравнение (1) задано в некомпактной области и ранее изучался в случае, когда функция $r(x,y) = 0$ [2]. Известно, что при исследовании разрешимости более простого случая линейного уравнения

$$-y^{'''} + r_0(x)y^{'} + q_0(x)y = F_0(x), \quad x \in R,$$

когда функция $r_0(x)$ может расти около бесконечно удаленной точки, возникают принципиальные трудности [4]. Немного работ, посвященных изучению случая (1), когда функции $r(x,y)$ и $q(x,y)$ не являются ограниченными по обоим переменным.

Мы будем обсуждать условия разрешимости уравнения (1) и выполнение для решения y оценки

$$\| -y^{'''}\|_2 + \|r_0(x,y)y^{'}\|_2 + \|q_0(x,y)y\|_2 < \infty.$$

Литература

1. Padhi S., Pati S. Theory of third-order differential equations. Springer, 2014.

2. Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Ospanov K.N. Coercive solvability of odd-order differential equations and its applications// Dokl. Math. **82** (2010), 909–911.

3. Ospanov K., Ospanov M. The maximal regularity of the third-order differential equation and its applications// Mathematical Methods in the Applied Sciences, **47:6** (2024), 4895–4910.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СЕМЕЙСТВА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Оспанов М. Н.[1], Мерзетхан А.[2],

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
[1]ospanov_mn@enu.kz; [2]akerkemerzetkhan@gmail.com

Различные задачи для систем дифференциальных уравнений первого порядка в ограниченных и неограниченных областях рассматривались многими авторами. В данной работе системы дифференциальных уравнений первого порядка рассматриваются в нецилиндрической области. Задача исследуется с использованием метода параметризации Д.С.Джумабаева [1].

Предположим, что $\varphi(x)$ непрерывна на R. В области $\Omega = [0,\varphi(x)] \times [0,\omega]$ рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(t,x)V + \Phi(t,x),\ t \in [0,\varphi(x)],\ x \in [0,\omega] \tag{1}$$

$$V(0,x) = V(\varphi(x),x) \tag{2}$$

где матрица $A(t,x) = [a_{ij}(t,x)]_{i,j=1}^{n}$ и функция $\Phi(t,x)$ непрерывна на $\Omega = [0,\varphi(x)] \times [0,\omega]$ и удовлетворяет условию

$$\mid a_{ii}(t,x) \mid \geq \sum_{i\neq j}^{n} \mid a_{ij}(t,x) \mid + \theta(t,x),\ i = \overline{1,n} \tag{3}$$

где $\theta(t,x) \geq \theta_0 > 0$ непрерывная на Ω функция, θ_0- constant.

Теорема. *Пусть матрица $A(t,x)$ удовлетворяет условию (3) и функция $\Phi(t,x)$ непрерывна на Ω. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и справедлива оценка*

$$\|V(t,x)\| \leq \left\| \frac{F(t,x)}{\varphi(x)\ \theta(t,x)} \right\|,\ x \in [0,\omega], t \in [0,\varphi(x)].$$

где $\|V(t,x)\| = \max\limits_{(t,x)\in\Omega} \mid V(t,x) \mid$.

Литература

1. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. №1. С. 50-66.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЧАСТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ЯЗЫКЕ PYTHON

Пирматов А. З.

Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызская Республика
pirmatov@oshsu.kg,

Введение. Частные дифференциальные уравнения (ЧДУ) играют важную роль в математическом моделировании физических, инженерных и финансовых процессов. Аналитическое решение таких уравнений возможно только для ограниченного числа задач, поэтому на практике широкое применение находят численные методы. Целью данной статьи является демонстрация подходов к численному решению ЧДУ с использованием языка программирования Python и его специализированных библиотек.

Частные дифференциальные уравнения и их классификация. В статье рассматриваются основные типы ЧДУ: уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов. Для каждого из них выделяются особенности и типичные области применения, например, гиперболические уравнения описывают волновые процессы, а эллиптические Ч статические состояния систем.

Обзор численных методов. Описаны три наиболее распространенных метода численного решения ЧДУ: метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных объемов (МКО). Приведены примеры задач, для которых эти методы являются стандартными инструментами. МКР основывается на аппроксимации производных конечными разностями и применяется для простейших уравнений, таких как уравнение теплопроводности. МКЭ используется для решения задач в сложных геометриях, а МКО Ч в задачах гидродинамики и вычислительной механики.

Практическая реализация. В практической части статьи приведен пример решения прикладной задачи: моделирование температурного распределения в металлической пластине с граничными условиями Дирихле. Шаг за шагом показана реализация численного алгоритма на Python, визуализация полученных решений и анализ влияния параметров схемы на точность результата.

Оптимизация и параллелизация вычислений. Отдельное внимание уделяется оптимизации численных алгоритмов. Описаны подходы к ускорению расчетов с помощью Numba и возможности использования GPU с CuPy. Показано, как параллелизация позволяет значительно сократить время выполнения задач большой размерности.

Заключение. В статье продемонстрировано, что язык Python и его библиотеки предоставляют мощные инструменты для численного решения ЧДУ. Рассмотренные примеры показывают простоту реализации и визуализации, что делает Python удобным средством для анализа и моделирования реальных физических процессов.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МНОГОМЕРНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Попов Н. С.

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
г. Якутск, Россия; popovnserg@mail.ru

Нелокальные краевые задачи и задачи с интегральными условиями для неклассических дифференциальных уравнений в частных производных рассматриваются в монографии А.И. Кожанова [1]. Исследования для параболических и гиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе проводились в [2].

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты, бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ $(0 < T < +\infty)$, $S = \Gamma \times (0,T)$ его боковая граница, $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ функции, заданные в цилиндре $\overline{Q}$, $u_0(x)$ — на множестве $\overline{\Omega}$, $N(t)$ — на множестве $[0,T]$ и $K_1(x,y,t)$, $K_2(x,y,t)$ — на множестве $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

В цилиндре Q рассматриваются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(Au - \Delta u\Big) - a(x,t)\Delta u + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((Au)_t - \Delta u\Big) - a(x,t)\Delta u + c(x,t)u = f(x,t), \tag{2}$$

где

$$Au = \int_0^t N(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

Для уравнения (1) выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$u(x,t)|_{(x,t)\in S} = \int\limits_{\Omega} K_1(x,y,t)u(y,t)dy|_{(x,t)\in S}. \tag{5}$$

Доказательство теорем существования и единственности регулярных решений краевых задач для уравнений (1), (4) проводится методами перехода к нагруженному уравнению с однородными краевыми условиями, продолжения по параметру, априорных оценок [1,2].

Литература

1. Кожанов А.И. Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных: сводка результатов, нерешенные задачи. –М.: Наука, 2024.

2. Кожанов А.И., Дюжева А.В. Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2021, Т. 25, № 3. С. 423–434.

К ТЕОРИИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С СИЛЬНО - ОСОБЫМИ ЯДРАМИ

Раджабова Л. Н.[1], Раджабов Н.[2]

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан,
[1]lutfya62@mail.ru [2]nusrat38@mail.ru1;

В прямоугольнике $D = \{(x, y) : a < x < a_0, b_0 < y < b\}$ с граничными линиями $\Gamma_1 = \{x = a, b_0 < y < b\}$, $\Gamma_2 = \{a < x < a_0, y = b\}$ рассмотрим переопределенную систему интегральных уравнений

$$(1)\begin{cases} u(x,y) + \lambda \int\limits_a^x \dfrac{u(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt - \mu \int\limits_y^b \dfrac{u(x,s)}{(b-s)^\beta} ds + \delta \int\limits_a^x \dfrac{dt}{(t-a)^\alpha} \int\limits_y^b \dfrac{u(t,s)}{(b-s)^\beta} ds = f(x,y), \\ u(x,y) + \gamma \int\limits_a^x \dfrac{u(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt = g_1(x,y), \\ u(x,y) - \chi \int\limits_y^b \dfrac{u(x,s)}{(b-s)^\beta} ds = g_2(x,y), \end{cases}$$

где λ, μ, δ, γ, χ – заданные постоянные числа, $f(x, y)$, $g_1(x, y)$, $g_2(x, y))$ – заданные функции, $u(x, y)$ – искомая функция.

Решение системы интегральных уравнений с сильно - особыми ядрами (1) будем искать в классе функций $u(x, y) \in C(\bar{D})$, обращающихся в нуль на Γ_1, Γ_2 соответственно с асимптотическими поведениями:

$$u(x, y) = o[(x - a)^{\delta_1}], \delta_1 > \alpha - 1,$$

при $x \to a$,

$$u(x, y) = O[(b - y)^{\gamma_1}, \gamma_1 > \beta - 1,$$

при $y \to b$.

Отметм, что система интегральных уравнений (1) изучена в случаях, когда коэффициенты первого уравнение системы связаны и не связаны между собой, получены явные решения системы интегральных уравнений, которые могут содержать произвольные постоянные, определены случаи, когда решение системы уравнений единственно, определены условия совместности уравнений системы, изучены свойства решений, ставятся и решаются задачи типа Коши, когда явные решения системы уравнений содержат произвольные постоянные.

Литература

1. Раджабов Н. Переопределенная линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверхсингулярные интегральные уравнение типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими и сверхсингулярными ядрами и их приложения. ТНУ, Душанбе - 2021, 320 с.

О ЯВНЫХ РЕШЕНИЯХ СИММЕТРИЧНОГО ТРЕХМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЕННОСТЬЮ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ, КОГДА КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ И РАЗНЫЕ

Раджабова Л. Н.[1], Шукурова Г. Н.[2]

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан,
[1]lutfya62@mail.ru; [2]ganjinshukurova0208@mail.ru

В области $D = \{(x, y, z) : 0 < x < a; 0 < y < b; -c < z < c\}$ изучается симметричное трехмерное интегральное уравнение типа Вольтерра с особенностями и логарифмической особенностью в ядре вида:

$$u(x,y,z) + A\int_0^x \frac{u(t,y,z)}{t}dt + B\int_0^y \frac{u(x,s,z)}{s}ds + C\int_{-z}^z \left[p + q\ln\left|\frac{z}{\tau}\right|\right]\frac{u(x,y,\tau)}{|\tau|}d\tau+$$
$$+A_1\int_0^y \frac{ds}{s}\int_0^x \frac{u(t,s,z)}{t}dt + B_1\int_{-z}^z \left[p + q\ln\left|\frac{z}{\tau}\right|\right]\frac{d\tau}{|\tau|}\int_0^x \frac{u(t,y,\tau)}{t}dt+$$
$$+C_1\int_{-z}^z \left[p + q\ln\left|\frac{z}{\tau}\right|\right]\frac{d\tau}{|\tau|}\int_0^y \frac{u(x,s,\tau)}{s}ds+$$
$$+E\int_{-z}^z \left[p + q\ln\left|\frac{z}{\tau}\right|\right]\frac{d\tau}{|\tau|}\int_0^y \frac{ds}{s}\int_0^x \frac{u(t,s,\tau)}{t}dt = f(x,y,z), \qquad (1)$$

где $A, B, C, A_1, B_1, C_1, E, p, q$ – заданные числа, $f(x, y, z)$ – заданная функция на $D, u(x, y, z)$ – искомая функция.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x, y, z) \in C(\overline{D})$, обращающихся в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y, z) = o[(x, y, z)^\varepsilon], \varepsilon > 0, \quad \text{при} \quad x \to 0, y \to 0, z \to \pm 0.$$

Интегральное уравнение (1) будем изучать в случае, когда коэффициенты уравнения связаны между собой определенным образом.

Для симметричного трехмерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре (1), в случае, когда коэффициенты уравнения связаны между собой, в зависимости от корней характеристического уравнения и знака коэффициентов получены многообразия решений, которые могут содержать от одной до четырех произвольных функций двух переменных или быть единственным, также решены задачи типа Коши.

Литература

1. Раджабова Л.Н., Шукурова Г.Н. К теории симметричных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре // ДАН РТ. 2017. Т.60. №3-4. С. 126–131.

2. Раджабова Л.Н., Шукурова Г.Н. Граничные задачи для симметричного двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью по одному переменному и особенностью по второму переменному // Вестник ТНУ, сер.ест.н. - Душанбе, 2019. №4. С. 5–14.

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ

Рамазанов М. И.[1], Гульманов Н. К.[2], Копбалина С. С.[3]

[1]Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан,

[1]ramamur@mail.ru, [2]gulmanov.nurtay@gmail.com, [3]kopbalina@mail.ru

В области $Q = \left\{(r,t) |\ 0 < r < t^{\omega},\ 0 < t < T,\ \omega > \frac{1}{2}\right\}$ найдено решение следующей граничной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{1-2\beta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad 0 < \beta < 1, \tag{1}$$

$$u(r,t)|_{r=0} = g_1(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(r,t)|_{r=t^{\omega}} = g_2(t), \quad t > 0. \tag{3}$$

Особенность задачи заключается в том, что область решения задачи в начальный момент времени отсутствует, то есть вырождается в точку. Методом обобщенных тепловых потенциалов задача редуцируется к псевдо-Вольтерровому интегральному уравнению второго рода, где норма соответствующего интегрального оператора равна единице и показано, что соответствующее однородное интегральное уравнение имеет ненулевое решение.

Финансирование. Работа выполнена по грантам Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан: AP23488740, 2024-2026 и AP23488729, 2024-2026.

Литература

1. Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Kopbalina S.S. Solution of a two-dimensional parabolic model problem in a degenerate angular domain //Bulletin of the Karaganda university-Mathematics. 2023. Vol.111, Issue 3, Page 91–108.

2. Ramazanov M.I., Jenaliyev M.T., Gulmanov N.K. Solution of the boundary value problem of heat conduction in a cone //Opuscula Mathematica. 2022. Vol.42, Page 75–91.

3. Ramazanov M.I., Gulmanov N.K. On the singular Volterra integral equation of the boundary value problem for heat conduction in a degenerating domain //Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompiuternye nauki. 2020. Vol.31, Page 241–252.

4. Ramazanov M.I., Gulmanov N.K. Solution of a two-dimensional boundary value problem of heat conduction in a degenerating domain //Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2021. V.111, Page 65–78.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ КОШИ–РИМАНА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Расулов А. Б.[1], Якивчик Н. В.[1]

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический нститут», Россия 111250, г. Москва, Красноказарменная ул. 14.

[1]rasulzoda55@gmail.com, RasulovAB@mpei.ru; [2]YakivchikNV@mpei.ru

Пусть $\Gamma = \sum_{j=1}^{4}\Gamma_j$ — граница прямоугольника $D = \{z : -a/2 < z < a/2, 0 < z < 1\}$, где $\Gamma_1 = \{z : z = a/2, 0 \le z \le 1\}$, $\Gamma_2 = \{z : z = 1, -a/2 \le z \le a/2\}$, $\Gamma_3 = \{z : z = -a/2, 0 \le z \le 1\}$, $\Gamma_4 = \{z : z = 0, -a/2 \le z \le a/2\}$.

В области D рассмотрим уравнение с оператором Коши–Римана вида

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} - Au = f \tag{1}$$

с коэффициентом

$$A = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{4} \frac{a_j}{|\rho_j|} + A_0 & \text{при} \quad z \in \overline{D}, \\ A_0 & \text{при} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}, \end{cases} \tag{2}$$

где $A_0 \in L^p(D)$, $p > 2$, $j = \overline{1,4}$.

Предполагается, что на каждом отрезке Γ_j функция $|a_j(z)|$ постоянна, более точно,

$$a_j(z) = a_j^* \, u_j(z), \quad u_j(z) = \frac{\rho_j}{|\rho_j|}, \ \ z \in \Gamma_j, \quad \begin{cases} \rho_1 = z + \bar z - a & \text{при} \quad z \in \Gamma_1, \\ \rho_2 = z - \bar z - 2i & \text{при} \quad z \in \Gamma_2, \\ \rho_3 = z + \bar z + a & \text{при} \quad z \in \Gamma_3, \\ \rho_4 = z - \bar z & \text{при} \quad z \in \Gamma_4. \end{cases} \tag{3}$$

В теории регулярных обобщенных аналитических функций [1] исследованы классические краевые задачи (задача Римана–Гильберта, линейного сопряжения) для областей с кусочно-гладкими границами.

Заметим, что для сингулярных обобщенных аналитических функций построение интегрального представления в областях с кусочно-гладкими границами и исследование граничных задач почти не рассматривались.

В настоящем докладе для обобщенного уравнения Коши–Римана в прямоугольной области с коэффициентом, имеющим на границе прямоугольника особенности первого порядка, получено интегральное представление решений и решены задача Дирихле и задача линейного сопряжения.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.

О ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Расулов М. С.

Институт Математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан, rasulovms@bk.ru;

Распространение новых или инвазивных видов является центральной темой экологии, и значительные исследования были посвящены лучшему пониманию природы такого распространения. Экологические проблемы требуют использования целой иерархии моделей, способных описывать не только разные уровни организации систем, но и взаимодействие между этими уровнями. Тем не менее, значительные успехи были достигнуты в исследованиях инвазии видов посредством исследований фронтального распространения.

Подход, предложенный в работе [1], моделирует явление распространения для одного вида, принимая фронт распространения как свободную границу, где ключевым предположением является то, что плотность популяции исчезает на фронте, а механизм распространения – определяется пространственным градиентом популяции на фронте. Следуя такому подходу, существуют различные биологические соображения в отношении двухвидовых моделей конкуренции.

В этой заметке мы изучаем задачу со свободной границей для системы квазилинейных параболических уравнений типа реакция-диффузия:

$$u_t = \left(d_1\left(u,v\right)u_x\right)_x + u\left(a_1 - b_1 u - c_1 v\right), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$v_t = \left(d_2\left(u,v\right)v_x\right)_x + v\left(a_2 - b_2 u - c_2 v\right), \quad (t,x) \in D, \tag{2}$$

$$u\left(0,x\right) = u_0\left(x\right), \quad v\left(0,x\right) = v_0\left(x\right), \quad 0 \le x \le s_0 = s\left(0\right), \tag{3}$$

$$u_x\left(t,0\right) = 0, \quad u\left(t,s(t)\right) = 0, v_x\left(t,0\right) = 0, \quad v\left(t,s\left(t\right)\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$s'\left(t\right) = -\left(d_{01} u_x\left(t,s\left(t\right)\right) + d_{02} v_x\left(t,s\left(t\right)\right)\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

где $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s\left(t\right)\}$, $d_{01} = d_1\left(0,0\right)$, $d_{02} = d_2\left(0,0\right)$; $u\left(t,x\right)$, $v\left(t,x\right)$ – плотности популяции; $s\left(t\right)$ – свободная (неизвестная) граница, которая представляет фронт распространения, определяется вместе с функциями $u\left(t,x\right)$, $v\left(t,x\right)$.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия: a) $d_i(u,v) \in C^{1+\alpha}(D)$, $0 < \alpha < 1$, $d_i\left(u,v\right) \ge d_{i0} > 0$, $d_{i0} = const, i = 1,2$;

b) $u_0\left(x\right) \in C^{2+\alpha}$, $0 < u_0\left(x\right) < M_1$, $v_0\left(x\right) \in C^{2+\alpha}$, $0 \le v_0\left(x\right) \le M_2$, $0 \le x \le s_0$, $u_0'\left(0\right) = 0$, $u_0\left(s_0\right) = 0$, $u_0'\left(s_0\right) < 0$, $v_0'\left(0\right) = 0$, $v_0\left(s_0\right) = 0$, $v_0'\left(s_0\right) < 0$;

c) $\lim\limits_{x \to s_0} \frac{u_0(x)}{s_0 - x} = 0$, $\lim\limits_{x \to s_0} \frac{v_0(x)}{s_0 - x} = 0$.

Задача (1)-(5) исследована в работе [2] в случае $d_i\left(u,v\right) \equiv const$, $i = 1,2$.

Литература

1. Y.Du, Z.Lin. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2010. T.42, №1. P. 377–405.

2. J.S.Guo, C.H.Wu. On a free boundary problem for a two-species weak competitor system // J.Dynam.Diff.Equations. 2012. T.24, №4. P. 873–895.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ С НЕСТАБИЛЬНЫМ СПЕКТРОМ

Садиева А. С.[1], Орозов М. О.[1]

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан,
[1]asadieva@oshsu.kg; [2]morozov@oshsu.kg

Нами исследуется сингулярно возмущенная задача с нестабильным спектром [1]:

$$\varepsilon Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

$$B_1 Y(x_1) + B_2 Y(x_2) + \ldots + B_n Y(x_n) = Y^0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – скалярный малый параметр, $A(x)$ – квадратная матрица функция nго порядка с простым спектром, $F(x)$ – заданная вектор функция, B_i – постоянные диагональные матрицы вида:

$$B_1 = diag\{1,0,0,\ldots,0\},\ B_2 = diag\{0,1,0,\ldots,0\},\ \ldots,\ B_n = diag\{0,0,0,\ldots,1\},$$

причем $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = E,\ E$ – единичная матрица nго порядка.

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что спектр матрицы, являющейся коэффициентом линейной части системы, нестабилен в нескольких точках рассматриваемого отрезка.

Методом регуляризации А.С. Ломова в работе [2] исследован случай $n = 3$.

Нами требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) на всем отрезке $x \in [0,1]$ при стремлении малого параметра ε к нулю.

Новизна работы заключается в том, что предлагается сравнительно удобный и легкий алгоритм построения асимптотического решения исследуемой задачи, модифицируя классический метод пограничных функций [3].

Литература

1. Wasow W.R. Linear turning point theory. Springer-Verlag, 1985.

2. Bobochko V. N. The de la Vallee-Poussin problem for a system of singularly perturbed differential equations with unstable spectrum // Soviet Math. (Iz. VUZ). 1988. V. 32, №6. P. 16 –28.

3. Sadieva A.S. Asymptotics of the Solution of the Cauchy Problem with an Unstable Spectrum and Prolonging Loss of Stability //Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, №. 3, pp. 1273–1281.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Сагдуллаева М. М.[1], Рахматов Н. Б.[2]

Национальный университет в Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент;
sagdullayevam@mail.ru[1]; nodirbekrakhmatov@gmail.com[2]

В данной работе изучается нелокальная задача с интегральными условиями для уравнениия частных промзводных третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части.

В области $D = \{(x,t); 0 < x < \ell; 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида:

$$Lu \equiv= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где $c(x,t)$, $f(x,t)$ – заданные функции, $u(x,t)$ – искомая действительная функция.

Нелокальная задача. *Требуется найти в области D решение $u(x,t)$, уравнения (1) удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и интегральным условиям

$$\int_0^\ell u(x,t)dx = \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = \overline{1,3})$, – заданные, непрерывные на $[0,\ell]$ и $[0,T]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \qquad \varphi'(\ell) = \mu_2(0); \qquad \int_0^\ell \varphi(x)dx = \mu_3(0).$$

Определение. *Регулярным в области D решением уравнения (1) называется действивительная функция $u(x,t)$ из класса $C^{3,1}(D)\bigcap C^{2,0}(\overline{D})$, удовлетворяют ему в обычном смысле.*

Имеет место следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи.

Теорема. *Если коэффициент и правая часть уравнения (1) удовлетворяют условиям*

$$c(x,t), \quad f(x,t) \in C(\overline{D}).$$

и заданные функции $\varphi(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = 1,2,3)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(x) \in C^2[0,\ell]; \quad \mu_1(t), \quad \mu_3(t) \in C^1[0,T], \quad \mu_2(t) \in C[0,T].$$

Тогда существует единственное непрерывное и ограниченное решение нелокальной задачи (1)–(4).

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА ВЯЗКОУПРУГОЕ МОМЕНТНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Сафаров У.И.[1], Хожиев А.Х.[2], Жураев Ш.И.[3]
[1,2]Бухарский инженерно-технологический институт, Бухара,Узбекистан,
azizhojiev20@gmail.com;
[3]Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,
sjurayev509@mail.ru.

В настоящее время наиболее исследованными являются задачи о распространении волн в классических упругих средах. При этом практически отсутствуют публикации по проблеме распространения волн в упругих средах с учетом внутреннего момента количества движения (моментные среды). Наличие внутреннего момента количества движения связано с тем, что сплошная среда с микроскопической точки зрения состоит из частиц, обладающих согласованным моментом количества движения даже при нуле вой макроскопической скорости. К таким средам относятся гранулированные среды, среды с гиромагнитными свойствами, магнитные жидкости, жидкие кристаллы и т.д. В последнее время, в связи с бурным развитием технологий, появилась насущная потребность в развитии теорий, которые с большой степенью точности описывают процессы деформирования, происходящие в мелкозернистых и нано размерных средах, волновые процессы в кристаллах и поликристаллических структурах, т.е. в средах, где особенностями строения является кристаллическим, которой нельзя пренебречь [1]. Классическая теория упругости не описывает с необходимой точностью процессы в подобных материалах. В работе приведена полная система уравнений несимметричной теории упругости, в которую входят линейные векторные уравнения движения в перемещениях, геометрические и физические соотношения [2]. Сформулированы начальные и основные граничные условия для среды Коссера

$$(1-\eta_1^{-2}-\alpha)grad\,divu+(1-\eta_1^{-2}+\alpha)\Delta u+2\alpha rot\omega=\ddot{u},$$

$$\eta_2^{-2}\Delta\omega+2\alpha\beta rotu-4\alpha\beta\omega=\ddot{\omega},$$

где $u=(u,0,w)^T,\omega=(0,\omega,0)^T$–векторы перемещений и микроповорота; η_1, η_2, α,β– безразмерные параметры, зависящие от свойств материала среды. Точками здесь и далее обозначаются производные по безразмерному времени τ. Построено интегральное представление динамического напряженно-деформированного состояния упругого моментного полупространства. Дана математическая постановка плоской нестационарной задачи типа Лэмба для полупространства, заполненного средой Коссера. Разработан метод решения, основанный на разложении искомых поверхностных функций влияния в ряды по малому параметру. Получена рекуррентная последовательность подзадач относительно коэффициентов рядов разложения по малому параметру.

Литература

1. Teshaev, M.K., Safarov, I.I., Kuldashov, N.U., Ishmamatov, M.R., Ruziev, T.R. On the Distribution of Free Waves on the Surface of a Viscoelastic Cylindrical Cavity. Journal of Vibration Engineering and Technologies, 2020, 8(4), pp. 579-585.

2. Тешаев М.Х. Об осуществлении сервосвязей электромеханической следящей системой. Известия ВУЗов. Математика. 2010, 54(12), ст. 38-44.

СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОУПРУГИХ ВОЛНОВОДАХ

Сафаров И.И.[1], Тешаев М.Х.[2], Каримов И.М.[3]

[1,3]Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент,Узбекистан, safarov54@mail.ru;

[2]Бухарское отделение института Математики АН РУз им. В.И.Романовского, Бухара, Узбекистан, muhsin5@mail.ru;

Рассматривается задача теории распространения и дифракции вязкоупругих волн в слоистых средах. Исследованы задачи о собственных волнах вязкоупругой полосы и полуоткрытого вязкоупругого волновода. Математические формулировки этих задач представляют собой краевые задачи для соответствующих систем дифференциальных уравнений с частными производными. Разработаны методы решения задач дифракции на неоднородностях в вязкоупругих волноводных структурах. Так в теории вязко- упругости чаще всего рассматриваются упругие изотропные однородные тела с вязкими свойствами, подверженные малым деформациям. Это предположение существенно ограничивает круг рассматриваемых объектов, однако позволяет получить обширную и полезную информацию о динамических процессах в реальных телах. Вязкоупругие свойства учитываются следующими соотношениями.

$$\bar{\lambda}_c = \frac{\nu_c E_0}{(1+\nu_c)(1-2\nu_c)}\left[1-\Gamma^c_\lambda(\omega_R)-i\Gamma^s_\lambda(\omega_R)\right], \quad \bar{\mu}_c = \frac{\nu_c E_0}{2(1+\nu_c)}\left[1-\Gamma^c_\lambda(\omega_R)-i\Gamma^s_\lambda(\omega_R)\right],$$

где E_0 – мгновений модуль упругости; ω_R – собственная частота; ν_c – коэффицент Пуассона, $R_{\lambda,\mu k}(\tau)$ – ядро релаксации,

$$\Gamma^c_{\lambda,\mu k}(\omega_R) = \int\limits_0^\infty R_{\lambda,\mu k}(\tau)\cos\omega_R\tau\, d\tau, \Gamma^S_{\lambda,\mu k}(\omega_R) = \int\limits_0^\infty R_{\lambda,\mu k}(\tau)\sin\omega_R\tau\, d\tau$$

соответственно, косинус и синус образы Фурье ядра релаксации материала. При таком подходе существует принципиальная возможность свести анализ поведения волн в общем случае к анализу простейших гармонических волн.

Выберем декартову систему координат (x, y, z) и будем считать, что рассматриваемые далее функции не зависят от координаты z, то есть $\frac{d}{dz} = 0$. В таком двумерном (или плоском) случае напряженно-деформированное состояние вязкоупругого тела характеризуют пять функций: напряжениях, ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ и перемещения u_x, u_y). Все эти функции комплексные и зависят от двух пространственных координат x, y и от времени.

Найдены комплексные собственные частоты для плоского вязкоупругого волновода с фиксированными границами и доказано, что система таких собственных волн является затухающим.

ЛУЧЕВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДВУМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В СРЕДЕ С РЕФРАКЦИЕЙ

Светов И. Е.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,
svetovie@math.nsc.ru

Пусть в единичном круге распределено некоторое векторное поле $v(x)$. Необходимо восстановить это векторное поле по известным значениям продольного и (или) поперечного лучевых преобразований. Предполагается, что в среде присутствует явление рефракции (распространение лучей происходит по кривым), которое моделируется заданием в области римановой метрики

$$g_\kappa(x) = (1 + \kappa|x|^2)^{-2}|dx|^2$$

постоянной кривизны 4κ при фиксированном $\kappa \in (-1, 1)$.

Для случая прямолинейного распространения лучей разработано довольно много подходов восстановления векторных полей, в том числе с использованием формул обращения. Лишь немногие из этих подходов удается перенести на криволинейный случай. Один из таких универсальных методов — метод наименьших квадратов [1]. В работе [2] для случая метрик вида $g_\kappa(x)$ было получено сингулярное разложение оператора лучевого преобразования, действующего на функции.

В докладе предлагается подход по восстановлению векторного поля, заданного в среде с рефракцией, по значениям лучевых преобразований. Подход основан на использовании сингулярного разложения лучевых преобразований в случае прямолинейного распространения лучей [3] и результатов статьи [2].

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

Литература

1. Svetov I.E., Derevtsov E.Yu., Volkov Yu.S., Schuster T. A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium // Mathematics and Computers in Simulation. 2014. V. 97. P. 207–223.

2. Mishra R.K., Monard F. Range characterizations and Singular Value Decomposition of the geodesic X-ray transform on disks of constant curvature // J. Spectr. Theory. 2021. V. 11, №3. P. 1005–1041.

3. Derevtsov E.Yu., Efimov A.V., Louis A.K., Schuster T. Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 19, №4–5. P. 689–715.

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Сипатдинова Б. К.

Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
sbiybinaz@mail.ru

Как известно обратные задачи для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода, второго порядка в ограниченных областях изучены в монографии [1]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа первого рода второго порядка в неограниченных областях [2], а для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченных областях такие задачи практические не исследовались. С этой целью в данной работе изучаются корректность одной обратной задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде.

В этой статье в области

$$G = (0,1) \times (0,T) \times \mathbb{R} = Q \times \mathbb{R} = \{(x,t,z); x \in (0,1); t \in (0,T); z \in \mathbb{R}\}$$

рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода второго порядка:

$$Lu = k(t)u_{tt} - \Delta u + \alpha\,(x,t)\,u_t + c\,(x,t)\,u = \psi\,(x,t,z), \tag{1}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ – оператор Лапласа, $k(0) \leq 0 \leq k(T)$, $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t) \cdot f(x,t,y)$, $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ – заданные функции, а функция $h(x,t)$ – неизвестная функция.

Линейная обратная задача

Найти функции$\{u(x,t,z),\ h(x,t)\}$, удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие, что функция $u(x,t,z)$ удовлетворяет следующими нелокальными краевыми условиями

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$\eta D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=1} \tag{3}$$

и дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0\,(x,t); \ell_0 \in R \tag{4}$$

при $p = 0, 1$, где γ и η – некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которых будут уточнены ниже, а функции $u(x,t,z)$ и $h(x,t)$ принадлежат классу

$$U = \left\{ (u,h) \middle|\ u(x,t,y) \in W_2^{2,3}(G\,);\, h(x,t) \in W_2^2(Q\,).\right\}$$

.

Литература

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент.2021г. с-176.

2. Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R., Turakulov Kh.Sh. The Linear Inverse Problem for the Three- Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain.// Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, T.42.№15, pp. 3606–3615.

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СОСТАВНОГО ТИПА

Сраждинов И. Ф.

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
israjdinov@bk.ru

Разрешимость смешанной задачи для гиперболических и параболических уравнений исследовано достаточно полно (см.[1-3]). Однако для уравнений с частными производными составного типа и тем более для систем уравнений составного типа исследовано недостаточно [4-6].

Пусть $U = U(t,x)$, $V = V(t,x)$ вещественные функции зависящие от t, x.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = aU, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = bU; \end{cases} \tag{1}$$

Данная система имеет характеристическую форму вида $\chi(\tau,\xi) = \tau^4 - \xi^4$ и поэтому является системой составного (эллиптико - гиперболического) типа. В области $D = \{(t,x) : \ 0 \leq x \leq l, \ t > 0\}$ решается смешанная задача. Доказывается

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in C^{3+\alpha}[0,l], \ \ \psi(x) \in C^{3+\alpha}[0,l]$. Тогда ряды представимые решения удовлетворяют системе уравнений (1), начальным условиям и краевым условиям. При этом возможно эти ряды дифференцировать по x и t до двух раз и полученные при этом ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Литература

1. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. - М.: "Гостехиздат". 1953.

2. Ильин В.А. Разрешимость смешанной задачи для гиперболических и параболических уравнений. Успехи математических наук. 1960. Т.15, вып. 2(92).-С.97-154.

3. Алимов Ш.А. Избранные научные труды. -Ташкент: "Мериюс". 2015.

4. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. -Ташкент. 1979.

5. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. -Москва: "Наука". 1987.

6. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. -Ташкент: "Фан". 1974.

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ С НЕКОТОРЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Сражидинов А.[1], **Абдраева Н.И.**[2]

Кызылкийский гуманитарно-педагогический институт БатГУ г. Кызыл-Кыя, Кыргызская Республика

[1]Srazhidinov.adi@gmail.com, [2]abd.nurj@gmail.com

Аннотация. *При изучении классического или неклассического уравнения математической физики, зачастую приходится обосновать равномерную сходимость разложения ряда Фурье той или иной функции, содержащейся в уравнении. Когда рассматривается вопрос о равномерной сходимости ряда Фурье функции, имеющей производную, принадлежащую пространству $L2$, решается положительно . Однако на практике часто приходится сталкиваться с не таковыми функциями. В этом направлении нам удалось, незначительно расширить класс равномерно сходящихся функций в ряд Фурье.*

Ряд Фурье функции $f(t)$ на $[-\pi,\pi]$ символически обозначим

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n cosnt + b_n sint,$$

где a_{i-1}, b_i- коэффициенты Фурье $f(t), i = 1, 2, ...[1, .386]$ доказана

Теорема 1. Если функция $f(t)$ с периодом 2π абсолютно непрерывна, а ее производная $f'(t)$ принадлежит $L_2[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на всей прямой R.

В [2] мы получили аналогичный результат, а именно, справедлива

Теорема 2. Пусть в свертке

$$\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds = f(t),\ 0 \le t \le 1 \tag{1}$$

функций $a(t)$ и $\varphi(t)$ из $L_2[0,1]$. Тогда разложение свертки в ряд Фурье по системе $\varphi_(i)(1-t)$ равномерно на [0,1] сходится к свертке (1), т.е. ряд $\Sigma_{i=1}^{\infty} f_i\varphi_i(1-t)t \in [0,1]$, сходится равномерно к $f(t)$ из (1), где $\varphi_(i)(t)$- ортонормированная система решений уравнений

$$\lambda_i\varphi_i(1-t) = \int_0^t a(t-s)\varphi_i(s)ds,\ 0 \le t \le 1,\ \textit{i=1,2}$$

а f_i-коэффициенты Фурье $f(1-t) : f_i = \int_0^1 f(1-s)\varphi_i(s)ds$. В теореме 2 в нашем случае $a(t) = 1$. Поэтому [3] имеем

$$\lambda_i = \frac{2}{2i+1}(-1)^i\pi,\ \varphi_i = \int_0^1 \varphi(1-s)\varphi_i(s)ds, \varphi(t) = f'(t), \varphi_i(s) = \sqrt{2sin}$$

$$m_i(1-s), m_i = \frac{2i+1}{2}\pi,\ i = 0, 1, ...,$$

т.е. справедлива

Теорема 3. Если $f(t)$ - абсолютно непрерывно, а ее производная $f'(t)$ принадлежит $L_2[0,1]$, то ряд

$$\Sigma_{i=0}^{\infty}\lambda_i\varphi_i\varphi_i(1-t) \tag{2}$$

равномерно на [0,1] сходится к абсолютно непрерывной функции $f(t)$ с $f(0) = 0$. В работе [4] доказывается аналогичная теореме 1

Теорема 4. Если $f(t)$ непрерывна на R и существует на более конечного числа точек $t_k(k = 1, 2, ..., m), -\pi \leq t_1 < t_2 < ... < t_n \leq \pi$ точках, что для всех $t \in [-\pi, \pi]/U^{\pi}_{k=1}t_k$ существует конечная производная $f'(t)$, причем $f' \in R[-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ к функции $f(t)$.

А нам удалось незначительно обобщить теорему 3 в этом направлении. Для ее изложения нам понадобится ввести некоторые определения.

Всюду будем предполагать, что $f'(t) \in L[0, 1]$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $\varphi(t) = f'(t)$ в точке t_0 из $[0, 1]$ имеет L_2- особенность, если для любого $\varepsilon > 0$ $\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \varphi^2(s)ds = +\infty$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $\varphi(t) = f'(t)$ в точке t_0 из [0,1] имеет изолированную L_2- особенность, если для точки t_0 существует некоторая $\varepsilon-$ окрестность $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, не содержащую, кроме точки t_0, других точек с L_2- особенностью.

Определение 3. Точки $t_0, t_1, ...$ называются изолированными точками сL_2- особенностью между собой, если для любой точки $t_i, i = 0, 1, ...$ существует ее $\varepsilon-$ окрестность, не содержащая точку t_j при $j \neq i$.

Пусть $t_0, t_1, ...$ являются изолированными между собой точками с L_2- особенностью функции $\varphi(t)$ на [0,1]. Обозначим $T_1 = \{y_0, y_1, ...\}$ множество предельных точек множества $T = \{t_0, t_1, ...\}$. Разумеется, любая точка из T является неизолированной точкой с L_2- особенностью. Также отметим, что множество T_1- не более чем счетное. Предполагается , что при любом $\varepsilon > 0$ $\varphi_\varepsilon(t) \in L_2[0, 1]$, где

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, t \in T_\varepsilon \cup T_{1\varepsilon} \\ \varphi(t), t \notin T_\varepsilon \cup T_{1\varepsilon}. \end{cases}$$

$T_\varepsilon = (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon) \cup (t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1)U..., T_{1\varepsilon} = (y_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)U...,\ 0 < \varepsilon_i \leq \varepsilon \to 0$

Имеет место следующая

Теорема 5. Пусть функции $f(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1], f(0) = 0$ и $\varphi(t) = f'(t)$ принадлежит $L[0, 1]$, причем $\varphi(t)$ имеет изолированную между собой L_2- особенность только на множестве T, а неизолированные точки L_2- особенностью может иметь лишь в предельных точках множества T. Тогда ряд Фурье (2) равномерно на [0,1] сходится к функции $f(t)$.

Литература

1. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. -М.:Наука , 1972. - 496 с.

2. **Сражидинов А.** Метод перехода для уравнений свертки и некоторые его применения//Тезисы докл. V Международ. научно-практич. конф. ИННОВАЦИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. КУЛЬТУРА 22 апреля 2022г.Тюмен: Тюмен. инд.унив. 2022. -С.188-192.

3. **Сражидинов А.** Метод перехода для уравнений свертки на примере //Вестник Иссык-Кульского университета, №57, 2024.- С.40-48

4. **Ющенко Д.П., Якубович О.В.** Математический анализ. Ряды Фурье : тексты лекций для студентов математических специальностей вузов. - Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2008.-71 с.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЛИНИЕЙ СОПРЯЖЕНИЯ $x = 0$

Сопуев А.А.

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

sopuevv@gmail.com

Начально-краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с двумя независимыми переменными исследованы в работах [1] - [2]. Нелокальные задачи, задачи со смещениями и обратные задачи для уравнений в частных производных третьего порядка рассмотрены в работах [3] - [5]. Однако нелокальные задачи мало исследованы для уравнений смешанного типа третьего порядка вида

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_{xy}, (x, y) \in D_1, \\ u_{xxy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u, (x, y) \in D_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ – заданные функции, а $D_1 = D \cap (x > 0), D_2 = D \cap (x < 0)$, $D = \{(x, y) : -\ell_1 < x < \ell, 0 < y < h\}; \ell, \ell_1, h > 0$.

Уравнение (1) в области D_1 имеет одну трехкратную характеристику $y = const$, а в области D_2 имеет один двукратный: $y = const$ и один простой: $x = const$ действительных характеристик.

Задача 1. Требуется найти в области D функцию $u(x, y)$ из класса $C^1(\overline{D}) \cap [C^{3+1}(D_1) \cup C^{2+1}(D_2)]$, которая в области $D \diagdown (y = 0)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y), u_{xx}(\ell, y) = \varphi_2(y), u(-\ell, y) + \alpha(y)u(x_0, y) = \varphi_3(y), 0 \leq y \leq \ell,$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), 0 \leq x \leq \ell; u(x, 0) = \psi_2(x), -\ell \leq x \leq 0,$$

где $\varphi_i(y)(i = \overline{1, 3}), \psi_j(x)(j = 1, 2), \alpha(y)$ - заданные гладкие функции, $-\ell < x_0 < 0$.

Методом интегральных уравнений доказано существование и единственность решения задачи 1. При построении решении задачи 1 в области D_1 использован метод функции Грина, а в области D_2 – метод функции Римана.

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. - Ташкент: Фан, 1979. - 240 с.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. - Ташкент: Фан, 1986. - 144 с.

3. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. - М.: Наука, 2006. - 287 с.

4. Кожобеков К.Г. Нелокальная задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2009. №1 (60). 3-40.

5. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. - М.: Наука, 2016. - 272 с.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕОДИНАКОВОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

Талипова М. Ж. [1], Бекбауова А. У.[2]

[1,2] НАО Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, Актобе, Казахстан

mira_talipova@mail.ru; altynshash.bekbauova@gmail.com

Дифференциальные уравнения часто используются для моделирования различных прикладных проблем [1].

У классических решений нелинейных уравнений с частными производными первого порядка, даже при сколь угодно гладких начальных функциях, с ростом времени могут сформироваться особенности. Поэтому возникает насущная необходимость расширить понятие классических решений систем уравнения в частных производных первого порядка. Решения в широком смысле (по Фридрихсу) квазилинейных гиперболических систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными построены в работах [2-3].

Постановка задачи. Рассматривается система

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\left(t,x,y\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{k} b_{1j}\left(t,x,y\right)\frac{\partial u_1}{\partial y_j}= \\ &\quad =P_{11}\left(t,x,y\right)u_1+P_{12}\left(t,x,y\right)u_2+f_1\left(t,x,y\right) \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m} a_{2j}\left(t,x,y\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{k} b_{2j}\left(t,x,y\right)\frac{\partial u_2}{\partial y_j}= \\ &\quad =P_{21}\left(t,x,y\right)u_1+P_{22}\left(t,x,y\right)u_2+f_2\left(t,x,y\right) \end{aligned} \tag{1}$$

где $t\in(-\infty,+\infty)=R$, $x=(x_1,\dots,x_m)\in R^m$, $y=(y_1,\dots,y_k)\in R^k$, $a_{11}(t,x,y)$, $a_{21}(t,x,y)$, $b_{11}(t,x,y)$, $b_{21}(t,x,y)$ – непрерывные вектор - функции размерности соответственно m, k, которые удовлетворяют условиями периодичности, гладкости, $P_{ij}(t,x,y)$ – $n_i\times n_j$ – матрицы, $(i,j=1,2)$, f_1, f_2 – вектор-функции размерности соответственно n_1 и n_2, они овладают свойствами периодичности и ограниченности.

Дана определение, получены достаточные условия существования и единственности решения в широком смысле системы (1) с периодическими условиями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ИРН AP19675358).

Литература

1. T. K. Yuldashev and O. Kh. Abdullaev. Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms // Lobachevskii J. Math. №42. 2021. P.1113–1123

2. Rozhdestvensky B. L., Yanenko N. N. Quasi-linear systems equations and their applications to gas dynamics, Nauka, M., 1978, 687 p.

3. Bekbauova A.U., Kenzhebayev K.K., Sartabanov Zh.A. Multiperiodic solutions of quasi-linear hyperbolic systems of partial differential equations // Mathematical journal MON RK. Ц 2010. T.10. №1(35). P. 39-43. (in Russian).

ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛАУРИЧЕЛЛА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Тулакова З. Р.[1], Эргашев Т. Г.[2]

[1]Ферганский филиал ТУИТ им. Мухаммада ал-Хоразмий, Фергана, Узбекистан;
[2]НИУ "ТИИИМСХ", Ташкент, Узбекистан;
ziyoda.tulakova.tatuff@gmail.com[1]; ergashev.tukhtasin@gmail.com[2]

Теорема о разложении. Для гипергеометрических функций Лауричелла справедливы следующие формулы разложения при $n = 1, 2, ...$

$$F_A^{(n)}\left(a, \mathbf{b}; \mathbf{c}; \mathbf{x}\right) = \sum_{|\mathbf{m}_n|=0}^{\infty} \frac{(a)_{A(n)}}{M_n!} \prod_{k=1}^{n} \frac{(b_k)_{B(k)}}{(c_k)_{B(k)}} x_k^{B(k)} F\left[\begin{array}{l} a + A(k), b_k + B(k); \\ c_k + B(k); \end{array} x_k\right],$$

$$F_B^{(n)}\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}; c; \mathbf{x}\right) = \sum_{|\mathbf{m}_n|=0}^{\infty} \frac{(-1)^{A(n)}}{(c)_{2A(n)} M_n!} \prod_{k=1}^{n} \frac{(a_k)_{B(k)} (b_k)_{B(k)}}{(c - 1 + A(k) - A(k-1))_{A(k)-A(k-1)}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} x_k^{B(k)} F\left(a_k + B(k), b_k + B(k); c + 2A\left(k\right); x_k\right),$$

$$F_C^{(n)}\left(a, b; \mathbf{c}; \mathbf{x}\right) = \sum_{|\mathbf{m}_n|+|\mathbf{p}_n|=0}^{\infty} \frac{\left[(a)_{A(n)+C(n)}\right]^2 (b)_{2A(n)+C(n)}}{M_n! P_n!} \prod_{k=1}^{n} \frac{x_k^{B(k)+D(k)}}{(c_k)_{B(k)+D(k)}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \frac{F\left(a + A(k) + C(k), b + 2A(k) + C(k); c_k + B(k) + D(k); x_k\right)}{(c_k)_{B(k)+D(k)} \left(a + A(k-1) + C(k-1)\right)_{A(k)-A(k-1)}},$$

$$F_D^{(n)}\left(a, \mathbf{b}; c; \mathbf{x}\right) = \sum_{|\mathbf{m}_n|+|\mathbf{p}_n|=0}^{\infty} \frac{(-1)^{A(n)} (a)_{2A(n)+C(n)}}{M_n! P_n! \left[(c)_{2A(n)+C(n)}\right]^2} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \frac{(c + 2A(k-1) + C(k-1))_{2A(k)-2A(k-1)} (b_k)_{B(k)+D(k)}}{(c + A(k) + A(k-1) + C(k-1))_{A(k)-A(k-1)}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} x_k^{B(k)+D(k)} F\left[\begin{array}{l} a + 2A(k) + C(k), b_k + B(k) + D(k); \\ c + 2A(k) + C(k); \end{array} x_k\right],$$

где $\mathbf{b} := (b_1, ..., b_n)$, $\mathbf{c} := (c_1, ..., c_n)$, $\mathbf{x} := (x_1, ..., x_n)$, $|\mathbf{k}| := k_1 + ... + k_n$, $k_1 \geq 0, ..., k_n \geq 0$, а $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$, $|\mathbf{m}_n$, $|\mathbf{p}_n|$, $M_n!$, $P_n!$ определены в [1].

Теорема о разложении существенно используется при построении явных решений краевых задач для многомерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами в конечных и бесконечных областях.

ОБЩЕЕ НЕПРЕРЫВНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С $1-$ ПЕРЕОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Тураев Х.

Термезский государственный педагогический институт, Термез, Узбекистан,
nxurramov22@mail.ru

В настоящей работе изучается вопросы построения: непрерывного решения систем линейных разностных уравнений с 1-периодическими коэффициентами следующего вида:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t), \tag{1}$$

где $t \in R = (+\infty, -\infty)$, $A(t)$ – вещественная непрерывная 1-периодическая $n \times n$ – матрица, $B(t)$ – вещественный 1- периодический вектор размерности n.

Исследован вопрос о построении $1-$ периодических решений системы (1) и их свойствах.

Общее непрерывное решение уравнения (1) найдено в виде

$$x(t) = C(t)\left[\Lambda(t)^t\omega(t) + (E - \Lambda(t))^{-1} C^{-1}(t)\right] B(t), \tag{2}$$

где $\Lambda(t)^t\omega(t) = \lambda_1^t(t)\omega_1(t), , \lambda_n^t(t)\omega_n(t)$, из которого также можно получить ряд выводов о свойствах непрерывных решений.

Литература

1. Пелюх Г.П., Шарковский А.Н. О линейных разностных уравнениях с периодическими коэффициентами. В кн.: Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Киев: Ин-т математики АН УССР. 1997. С.91-100.

2. Турдиев Т., Шарипова Т. Линейные функционально-разностные уравнения.// Изв.АН УзССР, 1975. №1.

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Туракулов Х. Ш.

Кокандский государственный педагогический институт;
e-mail:hamidtsh87@gmail.com

Как нам известно в работе [1] для уравнения смешанного типа как первого, так и второго рода второго порядка в ограниченных областях изучены корректность некоторых прямых и линейных обратных задач. В области

$$G = (-\alpha, \beta) \times (0, T) \times \mathbb{R} =$$
$$= Q \times \mathbb{R} = \{(x, t, z); x \in (-\alpha, \beta), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\},$$

рассмотрим уравнение Чаплыгина:

$$Lu = K(x)u_{tt} - \Delta u + a\,(x, t)\,u_t + c\,(x, t)\,u = f\,(x, t, z), \tag{1}$$

где $xK(x) > 0$, при $x \neq 0$, $-\alpha < x < \beta$, $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$- оператор Лапласа .

Здесь $f(x, t, z) = g(x, t, z) + h(x, t)\psi(x, t, z)$; $g(x, t, z)$ и $\psi(x, t, z)$-заданные функции, а функция $h(x, t)$ подлежит определению. Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x, t, z); h(x, t)\}$ удовлетворяющие уравнению (1) в области G , такие что, функция $u(x, t, z)$ удовлетворяет следующим нелокальным краевым условиям

$$\gamma D_t^p\, u|_{t=0} = D_t^p\, u|_{t=T}\,, \eta D_x^p u|_{x=-\alpha} = D_x^p u|_{x=\beta} \tag{2}$$

и дополнительному условию

$$u(x, t, \ell_0) = \varphi_0\,(x, t); \ell_0 \in R \tag{3}$$

при $p = 0, 1$, где γ и $\eta-$ некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которых будут уточнены ниже, а функции $u(x, t, z)$ и $h(x, t)$ принадлежат классу

$$U = \{\,(u, h)|\ \ u(x, t, y) \in W_2^{2,3}(G\,);\, h(x, t) \in W_2^2(Q\,).\}$$

. Далее будем считать, что $u(x, t, z)$ и $u_z(x, t, z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено Банахово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2}\ \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + |\lambda|^2\right)^3 \cdot \|\hat{u}\,(x, t, \lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\, d\lambda.$$

Литература

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент. 2021г. с-176.

2. Dzhamalov S.Z., Turakulov Kh.Sh and Sultanov M.S., On a nonlocal boundary value problem for a three-dimensional Trikomi equation in a prismatic unbounded domain. // Lobachevskii journal of mathematics. 2022. Vol. 43(11), P. 3104-3111.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ПРАБХАКАРА

Турдиев Х.Н.[1], Усмонов Д. А.[2]
[1,2]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
[1]xurshidjon2801@gmail.com [2]usmonov-doniyor@inbox.ru

В данной работе в прямоугольной области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\, {}^{PC}D_{0y}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u\left(x,y\right) + \lambda u\left(x,y\right) = f\left(y\right), \tag{1}$$

где $u\left(x,y\right)$, $f\left(y\right)$ – неизвестная функции; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, a, b$ – заданные действительные числа, причем $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $a > 0$, $b > 0$;

$${}^{PC}D_{0y}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u\left(x,y\right) = I_{0y}^{\alpha,1-\beta,-\gamma,\delta} \frac{\partial}{\partial y} u\left(x,y\right)$$

представляет собой регуляризованную дробную производную Прабхакара [1] и

$$I_{0y}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} g\left(y\right) = \int\limits_0^y \left(y-z\right)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[\delta(y-z)^{\alpha}\right] g\left(z\right) dz, \quad y > 0$$

представляет собой дробный интеграл Прабхакара [2],

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(z\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_m}{\Gamma\left(\alpha m + \beta\right)} \frac{z^m}{m!}$$

обобщенная функция Миттага – Леффлера [2].

Отметим, что при $\beta = 1$, $\delta = 0$ уравнение (1) является телеграфным уравнением

$$u_{xy}(x,y) + \lambda u(x,y) = f(x,y).$$

Задача *I***.** Найдите регулярные $u(x,y)$ и $f(y) \in C[0,b]$ функции, удовлетворяющие уравнению (1) и условиям

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \ 0 \le x \le a \quad u\left(0,y\right) = \psi\left(y\right), \quad 0 \le y \le b\ ,$$

$$u_x\left(0,y\right) = \omega\left(y\right), \quad 0 \le y \le b,$$

в Ω, где $\varphi\left(x\right)$, $\psi\left(y\right)$, $\omega\left(y\right)$ – заданные функции.

Литература

1. D'Ovidio M, Polito F. Fractional diffusion-telegraph equations and their associated stochastic solutions // Theory Probab Appl. 2013. Vol. 62 Iss. 4 pp. 552–574.

2. Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffer function in the kernel // Yokohama Math. 1971. Vol. 19. pp. 7–15.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Турсунов Д. А.[1], Бекмурза уулу Ыбадылла[1]

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан,
[1]dtursunov@oshsu.kg; [2]ybekmurzauulu@oshsu.kg

Работа посвящена построению полного разложения решения сингулярно возмущенной двухточечной краевой задачи с двумя особыми точками на границах рассматриваемого отрезка. Решение ищется в виде суммы трех функций, которые представимы асимптотическими рядами. На прямую невозможно построить равномерное асимптотическое разложение, поэтому вводится вспомогательная функция, с помощью которой удается построить асимптотику на всем отрезке включая особые точки.

Нами исследуется сингулярно возмущенная краевая задача:

$$\varepsilon y''(x) + x(1-x)p(x)y'(x) - q(x)y(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

$$y(0) = a, \quad y(1) = b, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр, a, b – известные постоянные числа, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – заданные бесконечно дифференцируемые функций на отрезке $x \in [0,1]$, причем $p(0) = q(0) = 1,\ p(x) > 0,\ q(x) > 0 : x \in [0,1]$.

Особенность исследуемой задачи заключается в том, что сингулярно возмущенное уравнение (1) при $\varepsilon \to 0$ имеет две особые точки $x = 0$ и $x = 1$.

Требуется построить асимптотику решения задачи (1)-(2) на всем отрезке $x \in [0,1]$ включая особые точки $x = 0$ и $x = 1$, при стремлении малого параметра ε к нулю.

Литература

1. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. Изд-во Моск. ун-та, 2011.

2. Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Матем. Заметки. – 2013. – Т. 94. – №4. – С. 484–487.

3. Bekmurza uulu Y. Asymptotics of solutions of boundary value problems for the equation $\varepsilon y'' + xp(x)y'q(x)y = f$ // Eurasian mathematical journal. 2022. Vol. 13. №3. P. 82 –91.

4. Wang X., Wang N. Singular perturbation boundary and interior layers problems with multiple turning points // Boundary Value Problems, 2024(1), 42

СОВМЕСТНОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Убаева Ж. К.[1], Тасмамбетов Ж. Н.[2]

[1]Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан, Zhanar-ubaeva@mail.ru;

[2]Западно-Казахстанский университет им. М.Утемисова, Уральск, Казахстан, tasmam@rambler.ru

Исследовано совместная система двух вырожденных гипергеометрических уравнений, полученные путемпредельного перехода из известной системы (F_B) Лауричелла. Доказаны ряд теорем относительно существования решений в виде функций Гумберта-Художникова и нормально-регулярных решений, установлены из связь.

Изучены возможности совместного решения двух вырожденных гипергеометрических систем

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 W}{\partial z_j \partial z_i} + (\gamma - z_i)\frac{\partial W}{\partial z_i} - \alpha_i W = 0, i = \overline{1, l} \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 W}{\partial z_j \partial z_i} + \gamma \frac{\partial W}{\partial z_i} - W = 0, i = \overline{l+1, n} \tag{2}$$

полученных путем предельного переходов из системы Лауричелла [1].

Доказаны ряд теорем относительно существования решений совместной системы (1)-(2) в виде функций Гумберта-Художникова.

Теорема 1. Совместная вырожденная гипергеометрическая система (1)-(2) имеет 2^n линейно-независимых частных решений вблизи особенности $(0, 0, ..., 0)$ одним из которых является функция Гумберта-Художникова

$$\Phi_{B,n}^{(0,n)}\binom{(\alpha_l)}{(\gamma)}|\,(z_n) = \sum_{m_1,\dots,m_n} \frac{(\alpha_1)_{m_1} ... (\alpha_l)_{m_l} z_1^{m_1}}{(\gamma)_{m_1+\dots+m_n} m_1!} ... \frac{z_n^{m_n}}{m_n!}. \tag{3}$$

Наряду с решением вида (3) существуют нормально-регулярные решения полученных из системы (1)-(2) с помощью преобразования

$$W(z_1, z_2, ..., z_n) = exp(\alpha_{1,0,\dots,0} z_1 + ... + \alpha_{0,0,\dots,1} z_n) U(z_1, ..., z_n), \tag{4}$$

где $\alpha_{1,0,\dots,0}, ..., \alpha_{0,0,\dots,1}$– неизвестные постоянные.

Для определения неизвестных коэффициентов $\alpha_{1,0,\dots,0}, ..., \alpha_{0,0,\dots,1}$ и неизвестных коэффициентов обобщенного степенного ряда $U(z_1, ..., z_n)$ применяется метод Фробениуса -Латышевой [2].

Литература

1. Художинков В.И. Две новые вырожденные гипергеометрические функции многих переменных и интегральные уравнения с ними //Дифф.уравнения. 2003. Т.39, №6. С. 835–843.

2. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Актобе.: ИП Жандилдаева С.Т., 2015.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ

Уразбоев Г. У.[1], Хасанов М. М.[2], Исмоилов О. Б.[3]

[1]Ургенчский государственный университет, Ургенч, Ташкент, gayrat71@mail.ru;

[2]Ургенчский государственный университет, Ургенч, Ташкент, hmuzaffar@mail.ru

[3]Хорезмское отделение Института математики имени В.И. Романовского, Ургенч, Ташкент, bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com

Уравнение КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций изучено в работе [1], а в работе [2] изучена отрицательно-четная иерархия мКдФ и ее солитонные решения. В этой работе изучается интегрирование уравнения мКдФ отрицательного порядка с нагруженным членом

$$\left\{ \begin{array}{c} q_{xt} = -2q\mu_t + \gamma(t)q(0,t)q, \\ \_\mu_x = -q^2 \end{array} \right. \quad t > 0, \quad x \in R. \tag{1}$$

Требуется найти решение $q(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x,t)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad [q_t(x,t) - \mu_t(x,t)]|_{x=0} = \beta(t), \tag{2}$$

$$q(x+\pi,t) = q(x,t), t \geq 0, \quad x \in R,$$

$$\begin{array}{c} q(x,t) \in C_x^1(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \\ \mu(x,t) \in C_x^1(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \end{array} \tag{3}$$

где $q_0(x) \in C^3(R)$,$\gamma(t) \in C[0,\ \infty)$, $\mu_0(t) \in C^1[0,\ \infty)$ и $\beta(t) \in C[0,\ \infty)$ заданные действительные функции, $q_0(x)$ имеет период π, а функция $\beta(t)$ ограничена. При изучении задачи (1)-(3) используется следующий оператор Дирака

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y, \quad x \in R, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x,t) \\ y_2(x,t) \end{pmatrix}.$$

Через $s(x,\lambda) = (s_1(x,\lambda), s_2(x,\lambda))^T$ обозначено решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda) = (0,\ 1)^T$.

Спектр оператора (4) состоит из множества $E = \bigcup\limits_{n\in Z}[\lambda_{2n},\lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t)$, $n \in Z$ задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для системы (4) вместе со знаками $\sigma_n(t) = sign\left\{s_2(\pi,\xi_n(t),t) - 1/s_2(\pi,\xi_n(t),t)\right\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (4).

Теорема 1. Пусть $(q(x,t),\mu(x,t))$ является решением задачи (1)-(3). Тогда спектр оператора Дирака с коэффициентом $q(x+\tau,t)$ не зависит от τ и t, а спектральные параметры $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $n\in Z\backslash\{0\}$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=\frac{1}{\xi_n}(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\left\{q_t(\tau,t)-\mu_t(\tau,t)+\frac{\gamma(t)q(0,t)}{2}\right\},\;\; n\in Z\backslash\{0\}. \tag{5}$$

Знаки $\sigma_n(t)$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)|_{t=0}=\xi_n^0,\quad \sigma_n(t)|_{t=0}=\sigma_n^0\,,\;\; n\in Z\backslash\{0\}, \tag{6}$$

где $\xi_n^0,\;\sigma_n^0,\;\; n\in Z\backslash\{0\}$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентом $q_0(x)$.

Учитывая формулы

$$q(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi), q_t(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\mu(\tau,t)=\mu_0(t)-\int_0^\tau q^2(s,t)ds, \mu_t(\tau,t)=\mu_0'(t)-2\int_0^\tau q(s,t)q_t(s,t)ds \tag{8}$$

систему (5) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 1. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(4). Метод обратной спектральной задачи.

Литература

1. Уразбоев Г.У., Хасанов М.М. Интегрирование уравнения КортевегаЏде Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 228–239.

2. Gomes J.F., Starvaggi Franca G., de Melo G.R. and Zimerman A.H. Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions. // J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 445204 (11pp).

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА С ЛОКАЛЬНЫМИ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Уринов А. К.[1,2], Орипов Д. Д.[1]

[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,
[2]Институт Математики имени В.И.Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан,
urinovak@mail.ru; dastonbekoripov94@gmail.com

В данной работе в прямоугольнике $\Omega = \{(x,t) :\ 0 < x < 1;\ 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение высокого четного порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\left(x^{\alpha}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}\right) = f\left(x,t\right), \tag{1}$$

где $u = u\left(x,t\right)$ – неизвестная функция, $f\left(x,t\right)$ – заданная функция, а α – заданное действительное число, причем $0 < \alpha < 1$, $n \in N$.

Исследуем следующую начально-граничную задачу:

Задача Д. Найти функцию $u\left(x,t\right)$, которая:

1) u_t, $(\partial^j/\partial x^j\,)\,u$, $(\partial^j/\partial x^j)\left[x^{\alpha}\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)u\right] \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $j = \overline{0, 2n-1}$; $(\partial^{2n}/\partial x^{2n})\left[x^{\alpha}\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)u\right]$, $u_{tt} \in C\left(\Omega\right)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3) выполняются следующие начальные и граничные условия

$$u\left(x,0\right) = \varphi_1\left(x\right), \quad x \in [0,1]\,, \ \ u_t\left(x,0\right) = \varphi_2\left(x\right), \quad x \in [0,1]$$

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u\left(0,t\right) + \dfrac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u\left(1,t\right) = 0,\ \ \dfrac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}u\left(0,t\right) = 0, \quad j = \overline{0, n-1},\ \ t \in [0,T]\,; \\
\dfrac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}\left(x^{\alpha}\dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u\left(x,t\right)\right)\Bigg|_{x=0} + \ \dfrac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}\left(x^{\alpha}\dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u\left(x,t\right)\right)\Bigg|_{x=1} = 0, \\
\dfrac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}\left(x^{\alpha}\dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u\left(x,t\right)\right)\Bigg|_{x=1} = 0,\ \ j = \overline{0, n-1},\ \ t \in [0,T]\,,
\end{array}\right\}$$

где $\varphi_1\left(x\right)$ и $\varphi_2\left(x\right)$ – заданные непрерывные функции.

Отметим, что уравнение (1) при $n = 1$, $\alpha = 0$ совпадает с уравнением колебания балки [1]. Некоторые начально-граничные задачи для уравнения (1) при $\forall n \in N$ и $\alpha \in (0,1)$ поставлены и изучены в работе [2].

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966.

2. Уринов А.К., Орипов Д.Д., О разрешимости одной начально–граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т.27, №4. С. 621–644.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В ЯДРЕ

Усмонов Д. А.[1], Омонова А. Н.[2]

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
[1]usmonov-doniyor@inbox.ru; [2]adibaxonomonova@gmail.com

В данной работе доказывается однозначная разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, содержащего интегральный оператор с функцией Бесселя в ядре.

Рассмотрим уравнение

$$y''(x) + \lambda I_{0x}^{\alpha,\gamma} y(x) + \gamma^2 y(x) = f(x), \ \ x \in (0,T), \tag{1}$$

где $y(x)$ - неизвестная функция, а $f(x)$ - заданная функция; $\alpha, \gamma, \lambda, T$ - заданные действительные числа, причем $\alpha > 0$, $T > 0$,

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma} y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-z)^{\alpha-1} \bar{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-z)\right] y(z)\, dz$$

– обощенным дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка α, $\bar{J}_\nu(z)$-функция Бесселя - Клиффорда, определяемая равенствами $\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z)$, $(z)_k$ - символ Похгаммера, $\Gamma(x)$- гамма-функция Эйлера [1], $J_\nu(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка ν [2].

Задача Коши. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям $y(0) = A$, $\ y'(0) = B$, где A, B - заданные действительные числа.

Теорема. *Если $f(x) \in C[0,T]$, тогда решение задачи Коши единственность, существует и определяется по следующей формуле:*

$$y(x) = A\mathbb{E}_{\beta,\,1,\,(-1/2)}\left[-\lambda x^\beta; \gamma x\right] + Bx\mathbb{E}_{\beta,\,2,\,1/2}\left[-\lambda x^\beta; \gamma x\right] +$$

$$+\int\limits_0^x (x-z)\mathbb{E}_{\beta,\,2,\,1/2}\left[-\lambda (x-z)^\beta; \gamma(x-z)\right] f(z)\, dz,$$

где $\beta = \alpha + 2$, $\mathbb{E}_{\alpha,\,\beta,\,\theta}[x; y] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \overline{J}_{\alpha n/2+\theta}(y)$.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. Москва: Наука, 1965.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. Москва: Наука, 1966.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Усманов К. И.[1], Назарова К. Ж.[2], Турганбаева Ж. Н.[3], Алтынбек Д.[4]

[1,2,3,4]Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан,

[1]kairat.usmanov@ayu.edu.kz; [2]kulzina.nazarova@ayu.edu.kz;
[3]zhannur.turganbaeva@ayu.edu.kz; [4]dinara.altynbek@ayu.edu.kz;

В данной работе на отрезке $[-1,1]$ исследуется краевая задача типа Самарского - Йонкина для интегро-дифференциального уравнения с инволюцией

$$y''\left(x\right)+\varepsilon y''\left(-x\right)=-\lambda y\left(x\right)+\nu\int\limits_{-1}^{1}K(x,s)y\left(s\right)ds+F\left(x\right),\ -1\leq x\leq 1,\ -1<\varepsilon<1,\tag{1}$$

$$y\left(-1\right)=y\left(1\right),\quad y'\left(1\right)=0.\tag{2}$$

Здесь $K(x,s)$непрерывна на $[-1,1]\times[-1,1]$, функция $F(x)$ непрерывна на рассматриваемом отрезке.

Разрешимость краевой задачи (1), (2),будем исследовать методом параметризации предложенный профессором Д.Джумабаевым [1]. Метод параметризации изначально был применен для исследования однозначной разрешимости краевой задачи для систем дифференциальных уравнений. Позже методом параметризации были исследованы разрешимости различных краевых задач.

Устанавливается следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $\alpha=2\sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}-\sin\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}\right)\neq 1$, тогда для однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно обратимость матрицы Q.

Если матрица Q не обратима, т.е. $\left(\frac{2}{\lambda}-1\right)\cdot\sin\sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\cdot\sin\sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}=0$, тогда разрешимость исходной задачи следует из теорем:

Теорема 2. Если $\alpha\neq 1$ и $\lambda_{1n}=\left(1-\varepsilon\right)n^2\pi^2$ то для разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{0}^{1}\sin n\pi\xi\cdot f\left(\xi\right)d\xi=0.\tag{3}$$

The authors were supported by the grant №AP23488086 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Литература

1. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения //Журнал вычислительной математики и математической физики. 1989. Т.29, №1. С. 50–66.

О КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОУПРУГИХ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Усмонов Б.Ш.[1], Болтаев З.И.[2], Нарзуллоев М.[3]

[1]Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан,
[2,3]Бухарский инженерно-технологический институт, Бухара, Узбекистан.

Проблема надежности тонкостенных элементов конструкций выдвигает на первый план вопрос о повышении точности расчетов. Дело в том, что элементы из композитных материалов обладают рядом особенностей, к которым относят четко выраженные анизотропные свойства, низкую сопротивляемость трансверсальным деформациям и т. д. При описании физико-механических характеристик композита на текущий момент времени можно выделить два основных подхода – структурный и феноменологический. Основной целью работы является разработка модифицированного и апробированного метода определения спектра собственных частот и форм колебаний составных оболочек вращения при произвольных условиях закрепления.

Рассмотрим круговую замкнутую цилиндрическую оболочку радиуса R, длины l и толщины h, собранную из m вязкоупругих ортотропных армированных слоев постоянной толщины. Круговая цилиндрическая оболочка связана с ее поверхностью системой координат s, φ, z (см.[1]). На основе вариационной постановки задачи получена система дифференциальных уравнений в частных производных с комплексными коэффициентами. Установлено, что влияние сдвиговых деформаций наиболее значимо для "коротких"оболочек, т.е. при $\frac{l}{R} < 1$. Действительно, для оболочек с параметром $\frac{l}{R} = 0.5$ погрешность от не уччта сдвига при расчете собственных частот достигает 15% при $n = 0$ (число рядов), а в случаях $n = 2$ и $n = 4$ составляет 18% и 23% соответственно. По мере увеличения $\frac{1}{R}$ наблюдается ослабление влияния поперечных деформаций. Так, уже при $\frac{l}{R} = 1.5$ значение изучаемой погрешности составило менее 5% при $n = 0$ и $n = 2$, а при $n = 4$ снизилось до 15%.

На основе численных результатов установлено, что влияние сдвиговых деформаций, также, как и влияние тангенциальных и сдвиговых инерционных слагаемых, можно в рассматриваемой постановке считать малозначимым. Создан эффективный программный комплекс, основанный на метод ортогональной прогонки, предназначенный для решения многоточечных краевых задач для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, который позволил выполнить анализ собственных частот оболочек вращения, и построить формы их свободных колебаний.

Литература

1. Safarov I.I.,Teshaev M.Kh., Boltaev Z.I. Wave propagation in visco elastic wedge with an arbitrary angle peaks. International Journal of Research in Engineering and Science (IJRES) . Volume 2 Issue 11 November. 2014. pp.32-37.

ВЛИЯНИЕ ТИПА ЯДРА ФУНКЦИОНАЛА ПАМЯТИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В ЭРЕДИТАРНОЙ МОДЕЛИ 6-ЯЧЕЙКОВОГО ГЕОДИНАМО

Фещенко Л. К., Водинчар Г. М.

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Камчатский край, Россия
feshenko.lk@yandex.ru

Крупномасштабные магнитные поля существуют в космических объектах различного пространственного масштаба. Наиболее признана в настоящее время динамо-теория формирования и поддерживания магнитного поля звезд и планет. В рамках этой теории механизм генерации магнитного поля Земли обеспечивается конвекцией в жидком ядре.

В работе [1] на основе анализа косвенных данных о неоднородности распределения плотности в жидком ядре была высказана гипотеза о крупномасштабной пространственной структуре конвекции, которой соответствует 6 конвективных ячеек. Эта гипотеза была положена в основу одной спектральной модели геодинамо [2]. Для полей скорости и температуры использовались разложения по крупномасштабным модам, соответствующим 6-ячейковой структуре, а для магнитного поля отбиралось минимальное число мод свободного затухания, достаточных для генерации поля. На основе этих разложений методом Галеркина строилась динамическая система для амплитуд мод. Преимущество таких маломодовых моделей состоит в том, что они позволяют рассчитать долговременную эволюцию магнитного поля на временных масштабах существования космического объекта $\sim 10^9$ лет.

В развитие работы [2], для учета эффекта памяти в подавлении турбулентного мелкомасштабного генератора магнитного поля (α-эффекта) энергией крупномасштабных мод, в модель введен наследственный (эредитарный) член. Он определяется квадратичным по полю функционалом $\int_0^t K(t-\tau)\sum_i \gamma_i^2(\tau)\,d\tau$, где γ_i – амплитуды магнитных мод. Конкретное выражение для ядра задает модель наследственного подавления. В представляемой работе рассматриваются два вида ядер со степенной асимптотикой. Первый вид ядра $K(t)=\frac{1}{(1+t)^\beta}$ соответствует подавлению без задержки отклика, а второй $K(t)=\frac{t^\alpha}{(1+t)^{\alpha+\beta}}$ соответствует задержке отклика.

Доклад посвящен результатам вычислительных экспериментов, в которых исследовалось влияние вида ядра и его параметров на возникающие в модели динамические режимы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-11-0064 «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности»).

Литература

1. Кузнецов В.В. Анизотропия свойств внутреннего ядра Земли // Успехи физических наук. 1996. Т. 167. №9. pp. 1001–1012.

2. Vodinchar G.M., Feshchenko L.K. Model of Geodynamo Driven by Six-jet Convection in the EarthЎs Core // Magnetohydrodynamics. 2016. Т. 52. №2. pp. 287–299.

ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ С УСЛОВИЯМИ НЕПРОНИКАНИЯ

Фурцев А. И.[1,2]

[1]Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
furtsev@hydro.nsc.ru;
[2]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
a.furtsev@g.nsu.ru

Рассматриваемые задачи равновесия описывают деформируемые тела, содержащие жесткие включения различной природы: объемные и тонкие, дополнительно характеризующиеся наличием трещин между включениями и окружающей средой.

Предполагается, что тела являются гиперупругими, их деформации могут быть большими, что приводит к существенно нелинейной постановке задач. В дополнение к этому, применяются условия взаимного непроникания, которые предотвращают нежелательный эффект взаимопроникновения материи и представляют собой дополнительные ограничения на решения. Указанные условия непроникания рассматриваются двух видов: могут быть как односторонними ограничениями на заранее неизвестные положения точек включений и края окружающей среды, так и глобальными условиями инъективности деформаций.

Для задач равновесия тел, содержащих включения и трещины, обсуждаются краевые задачи с условиями непроникания. Также исследуются сопутствующие задачи минимизации энергии и доказывается, что задачи равновесия имеют решения, являющиеся слабыми по отношению к краевым задачам.

Литература

1. Фурцев А.И. Задача о равновесии гиперупругого тела с жестким включением и трещиной с условиями непроникания // Сибирские электронные математические известия. 2024. Т. 21, №1. С. 1–5.

2. Furtsev A., Rudoy E., Sazhenkov S. On hyperelastic solid with thin rigid inclusion and crack subjected to global injectivity condition.// Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2024. V. 382. P. 20240115.

УСЛОВНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Хажиев И. О.

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
Туринский политехнический университет в г. Ташкенте,
kh.ikrom04@gmail.com

В данной работе начально-краевая задача для уравнения смешанного типа исследуется на условную корректность.

Рассмотрим уравнение

$$k(x)u_{tt}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\,u_x(x,t)\right) = f(x,t), \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x,t) : -l < x < l,\, x \neq 0,\ 0 < t < T\}$, где $p(x)$, $f(x,t)$ достаточно гладкие заданные функции, $p(x) > p_0$, p_0-некоторая положительная постоянная, $k(x) = \begin{cases} a, & x > 0, \\ b, & x < 0, \end{cases}$ $a > 0,\ b < 0.$

Постановка задачи. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям:
начальным

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ -l \le x \le l, \tag{2}$$

краевым

$$u(-l,t) = u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и условиям склеивания

$$u(-0,t) = u(+0,t),\ u_x(-0,t) = -u_x(+0,t),\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ достаточно гладкие функции.

Рассматриваемая задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики, а именно, в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных.

В настоящей работе исследуется условная корректность, доказываются теоремы об условной устойчивости и единственности решения задачи (1)–(4), а также строится приближенное решение.

Литература

1. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: изд-во Ин-та математики, 2010. 941 с.

2. Пятков С. Г. Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения, Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики : сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т математики. – Новосибирск, 1986. С. 65–84.

3. Фаязов К.С. Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка. Узбекский математический журнал,1995 г., №2. С. 89-93

О РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Хамитов А. А.

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
azizbek.khamitov.93@mail.ru

В области $D = \{(x,y,z) : 0 < x < p,\ 0 < y < q,\ 0 < z < r\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка вида

$$L[u] \equiv u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = f(x,y,z), \qquad (1)$$

где $p, q, r \in R$ и для него исследуем следующую задачу.

Задача A. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C^{3,2,2}_{x,y,z}(D) \cap C^{2,1,1}_{x,y,z}\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\begin{cases} \alpha u(x,0,z) + \beta u_y(x,0,z) = 0, \\ \gamma u(x,q,z) + \delta u_y(x,q,z) = 0, \\ u(x,y,0) = u(x,y,r) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} au(0,y,z) + bu_{xx}(0,y,z) = \psi_1(y,z), \\ cu(p,y,z) + du_{xx}(p,y,z) = \psi_2(y,z), \\ u_x(p,y,z) = \psi_3(y,z), \end{cases} \qquad (3)$$

где $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \backslash \{0\}$, а $f(x,y,z), \psi_i(y,z)$, $i = \overline{1,3}$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что для уравнения (1) в плоскости, т.е. $z = 0$ при $b = d = 0$ в работах [1-2], а при $a = c = 0$ и $\beta = \delta = 0$ в работе [3] исследованы краевые задачи.

Теорема. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $ab > 0, cd < 0, \alpha\beta < 0, \gamma\delta > 0$, оно единственно.

Теорема доказана методом интегралов энергии. Существование решения задачи доказана с помощью разделения переменных, решение выписано через построенную функцию Грина. Найдены условия на заданные функции, обеспечивающие регулярность решения поставленной задачи. При обосновании равномерной сходимости установлено отличие от нуля "малого знаменателя".

Литература

1. Апаков Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. - Т.: "Fan va texnologiya". 2019. 156 стр.

2. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных. Узбекский математический журнал. 2007. №1. -С. 14-23.

3. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина. Узбекский математический журнал. 2011. №3. -С. 36–42.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СМЕШАННОГО ТИПА

Ханхасаев В. Н.[1], **Баиров С. А.**[2]

[1]Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия,
hanhvladnick@mail.ru;

[2]Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
Улан-Удэ, Россия, bairov.sofron@gmail.com

Известно, что гиперболическое уравнение теплопроводности включает в себя как диффузионный, так и волновой характеры, что позволяет учесть скорость тепловой волны. Этот подход позволяет учесть явление теплопроводности более точно и обойти парадокс бесконечной скорости тепла, который возникает при использовании классического уравнения теплопроводности.

В работе рассматривается математическая модель гиперболо- параболического уравнения с нелинейным коэффициентом теплопроводности и со смешанными краевыми условиями для ограниченной пластины. Заданы теплофизические характеристики: $c_v, \lambda, \rho, \alpha_d$ и α_u -соответственно, удельная теплоемкость при постоянном объеме, коэффициент теплопроводности, удельная плотность и коэффициенты теплопередачи в законе Ньютона снизу и сверху пластины. Тогда уравнение, краевые условия и начальное условие запишутся в виде:

$$k(x,t)u_{tt} + c_v(x,t)\cdot\rho(x,t)u_t = (\lambda(u,x,y,t)u_x)_x + (\lambda(u,x,y,t)u_y)_y + c(x,y,t)u + f(x,y,t), \tag{1}$$

$$x = 0 : u(0,y,t) = u_l(y,t),\ x = X : u(X,y,t) = u_r(y,t), \tag{2}$$

$$y = 0 : -\lambda(u,x,0,t)\frac{\partial u(x,0,t)}{\partial y} + \alpha_d u(x,0,t) = u_d(x,t), \tag{3}$$

$$y = Y : \lambda(u,x,Y,t)\frac{\partial u(x,Y,t)}{\partial x} + \alpha_u u(x,Y,t) = u_u(x,t), \tag{4}$$

$$u(x,y,t)|_{t=T_1} = u_0(x,y). \tag{5}$$

Задача численно решена в пакете Mathcad-15 с использованием интегро- интерполяционного метода и локально-одномерной схемы. Результаты для бесконечной пластины с переменной y в качестве параметра приводятся в виде графиков и таблиц в работе[1] и получено свидетельство на государственную регистрацию программы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №23-21-00269, https://rscf.ru/project/23-21-00269/

Литература

1. Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. Моделирование распределения температуры при нагреве пластины с применением смешанного уравнения теплопроводности //Вестник бурятского государственного университета: математика, информатика. Улан-Удэ. №1. С. 37-45.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Ханхасаев В. Н.[1], Муняев С. И.[2]

[1,2]Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
[1]Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия,
[1]hanhvladnick@mail.ru; [2]sergmoon1986@mail.ru

В работе рассматривается математическая модель для смешанного нелинейного уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода.

$$k(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + c(x,t)u + b(x,t)u^r + f(x,t), \qquad (1)$$

в области $G = [0,L] \times [-T_1, T_2]$, при $t \leq 0$, $k(x,t) = 0$, а для $t > 0$, $k(x,t) > 0$, $\lambda(x,t)$ – коэффициент теплопроводности, $k(x,t)$ – коэффициент тепловой релаксации, $f(x,t)$ – переменный по пространственной и временной координатам внутренний источник тепла, $r > 1$ – целый параметр законов излучения.

Постановка начально-краевой задачи: найти решение уравнения (1) при выполнении краевых условий третьего рода и начального профиля температуры $u_0(x)$:

$$\left[\mp\lambda(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \alpha_{0,L}u(x,t)\right]_{x=0,L} = q_{0,L}(t), t \in [-T_1, T_2], \qquad (2)$$

$$u(x, -T_1) = u_0(x), \qquad (3)$$

где $\alpha_{0,L}$ и $q_{0,L}$ – коэффициенты теплоотдачи и плотности теплового потока поверхностных источников на левом и правом концах стержня [1]. Расчет ведется по квазилинейной методике, описанной в [2] для нелинейных уравнений.

Эта ММ моделирует процесс коммутационного отключения электрической дуги в спутном потоке газа с добавлением периода устойчивого горения еч до момента перехода переменного тока через ноль, когда дуга отключается. Численный расчет задачи ведется в среде программирования MathCAD – 15, в два этапа по неявной консервативной разностной схеме [2].

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №23-21-00269, https://rscf.ru/project/23-21-00269/

Литература

1. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообменаљ. Учебное пособие для теплофизических и теплоэнергетических спец. Москва.: Высш. школа, 1990.

2. Ханхасаев В. Н., Муняев С. И. кЧисленное решение третьей краевой задачи для нелинейного смешанного уравнения теплопроводностиљ // Вестник бурятского государственного университета: математика, информатика. Улан-Удэ. Т.4, №1. С. 14–21. 2023

ОБ ОТРИЦАТЕЛЬНО МОДИФИЦИРОВАННОМ УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА-КОСИНУС-ГОРДОНА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНОЗОННЫХ ФУНКЦИЙ

Хасанов А. Б.[1], Абдивохидов А. А.[2]

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан,

[1]ahasanov2002@mail.ru [2]azamatabdivoxidov@mail.ru

В данной работе рассматривается смешанная задача для отрицательного модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза–косинус Гордона (омКдФ–chГ) вида

$$\begin{cases} a(t)\left(u_{xt}-\operatorname{ch}(2u)\right)-b(t)\left(u_{xxxt}-(2u_x\mu_{xt})_x\right)=0, \\ \mu_{xx}=u_x^2, \end{cases} \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0}=u_0(x), \quad u_0(x+\pi)=u_0(x)\in C^5(\mathbb{R}), \\ u(x,t)|_{x=0}=\alpha(t), \quad \mu_x(x,t)|_{x=0}=\beta(t), \\ \left[u_{xt}(x,t)-\mu_{xt}(x,t)\right]|_{x=0}=\zeta(t) \end{cases} \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π периодических по x функций удовлетворяющие условиям гладкости

$$u(x,t)\in C^{4,1}_{x,t}(t>0)\cap C(t\geq 0),\;\; \mu(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(t>0)\cap C(t\geq 0). \tag{3}$$

Здесь $a(t),b(t)\in C[0;\infty)$ и $\alpha(t),\beta(t),\zeta(t)\in C^1(t>0)\cap C(t\geq 0)$ – заданные непрерывна дифференцируемые ограниченные функции.

Теорема. Если периодическая бесконечнозонная функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию

$$u_0(x+\pi)=u_0(x)\in C^5(\mathbb{R}),$$

и $\alpha(t),\beta(t),\zeta(t)\in C^1(t>0)\bigcap C(t\geq 0)$ – ограниченные функции, то существует однозначно определяемое глобальное решения $u(x,t),\mu_x(x,t)$, $x\in\mathbb{R},t>0$, смешанной задачи (1)–(3) и принадлежит классу гладкости (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // Journal of the Physical Society of Japan. Vol. 32. P. 1681.

2. Хоитметов У. А, Собиров. Ш. К.Интегрирование нагруженного уравнения мкдф с источником в классе быстроубывающих функций// Матем. заметки СВФУ, 2023. Том 30, №2. –С. 75–91.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ

Хасанов М. М.[1], Рахимов И. Д.[2], Атахонова М. Р.[3]

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Ташкент,
[1]hmuzaffar@mail.ru; [2]ilxom.raximov.87@gmail.com [3]atakhonovamukhayyo@gmail.com

В работах [1-3] были изучены гамильтонова структура, бесконечное множество законов сохранения, N – солитонные, квазипериодические волновые решения для уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка.

В данной работе изучается уравнение КдФ отрицательного порядка с дополнительным членом

$$\begin{cases} q_t = p_x \\ p_{xxx} + 4qp_x + 2q_x p + \gamma(t)q(0,t)q_x(x,t) = 0 \end{cases}, \qquad t > 0, \quad x \in R^1, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} q(x,t)|_{t=0} &= q_0(x), \\ p(x,t)|_{x=0} &= p_0(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где $q_0(x)$, $p_0(t)$ и $\gamma(t) \in C[0,\ \infty)$ действительные функции приччм $q_0(x)$ π – периодическая функция. Требуется найти действительные функции $q(x,t)$ и $p(x,t)$, которые π – периодические по переменной x:

$$p(x+\pi,t) \equiv p(x,t), q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), t \geq 0, \quad x \in R^1 \tag{3}$$

и удовлетворяют условиям гладкости:

$$\begin{array}{l} q(x,t) \in C^{1,1}_{t,x}(t > 0) \cap C(t \geq 0) \\ p(x,t) \in C^{3}_{x}(t > 0) \cap C(t \geq 0) \end{array}. \tag{4}$$

При изучении задачи (1)–(4) используется следующий оператор Штурма-Лиувилля

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda\, y, \quad x \in R^1. \tag{5}$$

Через $s(x,\lambda,t)$ – обозначим решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = 0$, $s'(0,\lambda,t) = 1$.

Литература

1. Qiao Z.J., Fan E.G. Negative-order Kortewe-de Vries equations, Phys. Rev., 2012, vol. 86, issue 1, pp. 016601. https:// doi:10.1103/PhysRevE.86.016601

2. Chen J.B. Quasi-periodic solutions to a negative-order integrable system of 2-component KdV equation, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 2018, vol. 15, issue 3, pp. 1–34. https://doi.org/10.1142/S0219887818500408.

3. Qiao Z.J., Li J.B. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions, Euro. Phys. Lett., 2011, vol. 94, pp. 50003. https://doi: 10.1209/0295-5075/94/50003.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА ПСЕВДОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ

Хашимов А. Р.[1], **Холбоев Б. М.**[2]

[1]Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан.
[2] Ташкентский филиал РЭУ им. Г.В. Плеханова, Ташкент, Узбекистан.
bakhodir.kholboev@gmail.com

Целью данной статьи исследовать уравнение

$$L_0 lu + L_1 u + Mu = f(x, y, t), \tag{1}$$

в области $Q = G \times (0, T),\ G = D \times \Omega$. Здесь $D \in R_x^n-$ ограниченная, а $\Omega = \{y : y_1 > 0\} \in R_y^m-$ неограниченная область, с гладкими границами Γ_1 и $\sum$ соответственно,

$$lu = u_t + \alpha^k(x, y, t)u_{x_k} + \alpha(x, y, t)u,\ \ L - 1u = b^{ij}(x, y, t)u_{x_i x_j} + b^i(x, y, t)u_{x_i},$$

$$L_0 u = u_t - a^{ij}(x, y, t)u_{x_i x_j} + a^i(x, y, t)u_{x_i} + a(x, y, t)u,$$
$$Mu = c^{pq}(x, y, t)u_{x_i x_j} + c^p(x, y, t)u_{x_i} + c(x, y, t)u.$$

Уравнение (1) было исследовано в работе [1] и [2]. Уравнение (1) рассмотрим со следующем граничным условием

$$u|_{\partial Q} = 0,\ \ \alpha^k u_{x_k}|_{\sigma_2} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\sigma_2 = \{(x, y, t) \in \partial G \times (0, T) : \alpha^k v_k < 0\}$, $v_k --$ вектор внутренней нормали к Q в точке (x, y, t). Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $-1 \le a^{ij}_{x_i} + a^i + a \le 0; \theta \equiv d_0 - \frac{1}{2}d^{ij}_{x_i x_j} + \frac{1}{2}d^i_{x_i} - \frac{1}{2}c^{pq}_{y_p y_q} + \frac{1}{2}c^p_{y_p} - c < 0$. Если функция $u(x, y, t)$ является обобщенным решением задачи (1), (2) в области Q и $f(x, y, t) = 0$ в G_{τ^0}. Тогда при любых $0 \le R_0 \le R$ имеет место оценка

$\int_{\Omega_{\tau(R_0)}} E(u)dx \le exp[-(R - R_0)] \int_{\Omega_{\tau(R)}} E(u)dx$, в $\Omega_{\tau-0}$.

Здесь $E(u) = d^{ij}u_{x_i}u_{x_j} + c^{pq}u_{y_p}u_{y_q} + u_t^2 - \theta u^2$, $d^{ij} = d^{ji}$, $\beta_0|\xi|^2 \le d^{ij}\xi_i\xi_j \le \alpha_1|\xi|^2$, $(x, y, t) \in Q \cup \partial Q$, $\theta \in \mathrm{R}^{n+m+1}$.

Литература

1. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск, 1990, 130 с.

2. Khashimov A.R. and Dana Smetanova. On the Uniqueness Classes of Solutions of Boundary Value Problems for Third-Order Equations of the Pseudo-Elliptic Type.//Axioms. 2020. №9. vol. 80.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ МКДФ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Хоитметов У. А.[1], **Собиров Ш. К.**[2]
Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,
[1]x_umid1@mail.ru [2]shexzod19942@mail.ru

В данной работе рассматривается следующая система дифференциальных уравнений

$$u_t + P\left(u(x_0,t)\right)\left(6u^2u_x + u_{xxx}\right) + Q\left(u(x_1,t)\right)u_x = i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\phi_1^2(x,\eta,t) - \phi_2^2(x,\eta,t)\right)\,d\eta,$$

$$L(t)\phi(x,\eta,t) = \eta\phi(x,\eta,t), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $L(t)$ оператора Дирака и где $P(y)$ и $Q(s)$ многочлены от y и s соответственно. Мы будем исследовать систему уравнений (1) при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

При этом начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:

1)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|u_0(x)|\,dx < \infty; \tag{3}$$

2) Оператор $L(0) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix}$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots, \xi_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \ldots, m_N(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

Вектор-функция $\phi = (\phi_1(x,\eta,t), \phi_2(x,\eta,t))^T$ обладает следующим асимптотическим видом $\phi(x,\eta,t) \to h\left(\eta,t\right)\begin{pmatrix}\exp(-i\eta x) \\ \exp(i\eta x)\end{pmatrix}, \quad x \to \infty$. Где $h(\eta,t)$ некоторая заданная непрерывная функция, которая удовлетворяет условиям $h(-\eta,t) = h(\eta,t)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|h(\eta,t)|^2\,d\eta < \infty, \quad t \geq 0$.

Предположим, что функция $u(x,t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left((1+|x|)\,|u(x,t)| + \sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|\right)dx < \infty, \;\; k = 1,2,3. \tag{4}$$

Литература

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // Journal of the Physical Society of Japan. Vol. 32. P. 1681.

2. Хоитметов У. А, Собиров. Ш. К.Интегрирование нагруженного уравнения мкдф с источником в классе быстроубывающих функций. Математические заметки СВФУ, 2023. Том 30. N. 2. Стр. 75-91.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С НАГРУЖЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ И С ИСТОЧНИКОМ В ВИДЕ СУММЫ В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Хоитметов У. А.[1], Хасанов Т. Г.[2]

[1]Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,
x_umid@mail.ru;
[2]Самаркандский филиал ТМУК, Самаркад, Узбекистан,
temur.xasanov.2018@mail.ru

В данной работе изучается нагруженное уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) с источником вида:

$$\begin{gathered} u_t + P\left(u(x_0,t)\right)\left(u_{xxx} - 6uu_x\right) + Q\left(u(x_1,t)\right)u_x + 2\sum_{m=1}^{N}\xi_m \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\varphi_m(x,t)\right|^2\right) = 0, \\ -\varphi_m'' + u(x,t)\varphi_m = \lambda_m(t)\varphi_m, \ \ m = \overline{1,\ N} \end{gathered} \tag{1}$$

где $P(u(x_0,t))$ и $Q(u(x_1,t))$ - некоторые многочлены от $u(x_0,t)$ и $u(x_1,t)$соответственно, а $x_0,\, x_1 \in R,\ \xi_m,\ m = 1,2,...,N$ заданное вещественные число. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in R \tag{2}$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладают свойствами:

1)
$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\left|u_0(x)\right| dx < \infty. \tag{3}$$

2) Оператор $L(0) := -\frac{d^2}{dx^2} + u_0(x), \ \ x \in R$ имеет равно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0),\, \lambda_2(0),\, ...,\lambda_N(0)$.

Предполагается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi_m(x,t)\right|^2 dx = A_m(t), \ \ m = \overline{1,\ N} \tag{4}$$

где $A_m(t) > 0, \ \ m = \overline{1,\ N}$ заданные положительные непрерывные функции.

Требуется найти функцию $u(x,t)$, которая обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам в точке $x \to \pm\infty$, т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\left(\left|u(x,t)\right| + \left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right|\right) dx < \infty, \quad j = 1,2,3,... \tag{5}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $u(x,t),\ \varphi_m(x,t),\ x \in R,\ t > 0,\ m = \overline{1,\ N}$ задачи (1)-(5), с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля. Подобные работы подробно рассмотрены в статьях.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Ходжаниязов А. Г.

Нукусский государственный педагогический институт, Нукус, Узбекистан,
khodjaniyazovazamat@gmail.com

Задача. В области $\Omega = \{(x, y) : \ -1 < x, y < 1\}$ найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям

$$u\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\,(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u\,(0, y)}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

где λ- спектральный параметр.

Нетривиальные решения задачи (1),(2) будем искать методом разделения переменных в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Тогда исходная задача приводится к следующим задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$Y'' + Y' + \mu Y = 0, \ \ Y\,(-1) = 0, \ \ Y\,(1) = 0, \tag{3}$$

$$X^{IV} - \mu X'' + \lambda X = 0, \ \ X(\pm 1) = 0, \ \ X(0) = 0, \ \ X'(0) = 0. \tag{4}$$

где постоянная μ будет определена позднее.

Учитывая различное расположение корней характеристического уравнения, находим, что $\mu_l = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{2}\right)^2$, $l = 1, 2, ...$

Собственными функциями задачи (3) будут

$$Y_l\,(y) = \exp\left\{-\frac{1}{2}y\right\}\sin\frac{l\pi}{2}\,(y-1)\,, \ \ l = 1, 2, ... \ .$$

Собственными функциями задачи (4) будут

$$X_{kl}\,(x) = \operatorname{sh} px \sin k\pi x, \quad p^2 = \frac{2(k\pi)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{2}\right)^2 - 1}{2}, \ \ q = k\pi, \ \ k, l = 1, 2, ... \ .$$

Для поставленной задачи (1) и (2) собственные функции имеют вид

$$u_{kl}\,(x, y) = \exp\left\{-\frac{1}{2}y\right\}\operatorname{sh} p_{kl}x \sin k\pi x \sin\frac{l\pi}{2}\,(y-1)\,, \ \ k, l = 1, 2, ... \ .$$

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент.: Фан, 2000.

2. Джураев Т.Д. О спектральных задачах для уравнений третьего порядка составного типа //ДАН РУз. 2006. №2. С. 5–8.

О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ТЕЛА С ТОНКИМ СЛАБО ИСКРИВЛЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Хошимов Д. З.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
d.khoshimov@g.nsu.ru

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей $\Gamma, \gamma \subset \Omega$, $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, где $\gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = \varphi(x_1), x_1 \in (-1,0)\}$ пересекает границу в точке $(0,0)$ под ненулевым углом, а $\varphi \in C^1[-1,0]$ – заданная гладкая функция, $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ – заданный вектор внешних сил, действующих на упругое тело, $k \in L^\infty(-1,0)$ – кривизна срединной линии тонкого включения.

Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – единичный вектор нормали к γ, а $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$ – касательный вектор, $A = \{a_{ijkl}\}, i,j,k,l = 1,2$ – заданный положительно определенный тензор модулей упругости.

Требуется найти функцию $\mathbf{u}$ такую, что

$$-\mathrm{div}\,\sigma = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad \sigma - A\epsilon(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \tag{1}$$

$$v_{,1111} + k(\omega_{,1} + kv) = [\sigma_\nu]\, p \quad \text{при} \quad x_1 \in (-1,0), \tag{2}$$

$$-\omega_{,11} - (kv)_{,1} = [\sigma_\tau]\, p \quad \text{при} \quad x_1 \in (-1,0), \tag{3}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad v = \omega = v_{,11} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \tag{4}$$

$$v_{,11} = v_{,111} = \omega_{,1} + kv = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = -1, \quad v = u_\nu^-, \quad \omega = u_\tau^- \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{5}$$

$$[\mathbf{u}]\,\nu \ge 0, \quad \sigma_\nu^+ \le 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+\,[\mathbf{u}]\,\nu = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{6}$$

$\epsilon(\mathbf{u}) = \{\epsilon_{ij}(\mathbf{u})\}$ – тензор деформаций, $\epsilon_{ij} = (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i})/2, i,j = 1,2; \sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$, $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \sigma_\tau = \sigma\nu \cdot \tau, \mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}\nu, u_\tau = \mathbf{u}\tau, p = \sqrt{1 + \varphi_{,1}^2}$.

Задача формулируется в виде вариационного неравенства:

$$(\mathbf{u}, v, \omega) \in K \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\mathbf{u})\epsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})dx - \int\limits_{\Omega_\gamma} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})dx + \int\limits_{-1}^{0} v_{,11}(\bar{v}_{,11} - v_{,11})dx_1 +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{0} (\omega_{,1} + kv)((\bar{\omega}_{,1} - \omega_{,1}) + k(\bar{v} - v))dx_1 \ge 0 \quad \forall(\bar{\mathbf{u}}, \bar{v}, \bar{\omega}) \in K, \tag{7}$$

$$K = \{(\mathbf{u}, v, \omega) \in W \quad | \quad [u_\nu] \ge 0, \quad v = u_\nu^-, \quad \omega = u_\tau^- \quad \text{на} \quad \gamma\}$$

где

$$W = \{(\mathbf{u}, v, \omega) \quad | \quad \mathbf{u} \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2, v \in H^2(-1,0), \omega \in H^1(-1,0); v(0) = \omega(0) = 0\}$$

$$H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2 = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega_\gamma)^2 \mid \mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\}$$

Основным результатом работы является следующий результат.

Вариационное неравенства (7) имеет единственное решение и эквивалентно задаче (1)-(6).

Результаты различных моделей упругих тел с тонкими слабо искривленными включениями исследованы в работах А.М.Хлуднева.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Холбеков Ж.А.

Ташкентский государственный технический университет, Узбекистан,
juratxolbekov@gmail.com

В 1969 году А.М. Нахушев [1] предложил ряд задач нового типа, вошедших в математическую литературу под названием краевых задач со смещением, которые, как оказалось, тесно связаны с нагруженными дифференциальными уравнениями.

Выяснили, что многие весьма важные задачи математической физики и биологии, особенно задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, движения мало-сжимаемой жидкости, окруженной пористой средой, приводят к краевым задачам для нагруженных дифференциальных уравнений.

В процессе исследования уравнений смешанного типа с нагрузкой, существующие принципы экстремума и теоремы существования, а также методы классической теории не могут быть применены напрямую. Локальные и нелокальные задачи для нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка с тремя линиями изменения типа изучены в работах [2-3].

Однако, несмотря на имеющиеся многочисленные работы по краевым задачам для смешанных уравнений, до сих пор остается не исследованные локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений параболо – гиперболического типа третьего порядка.

Настоящая работа посвящена постановке и изучению локальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с тремя линиями изменения типа, содержащий в себе след искомой функции вида

$$0=\frac{\partial}{\partial y}\begin{cases} u_y-u_{xx}, & x>0, \quad y>0,\\ u_{yy}-u_{xx}+\mu_1 u(x,0), & \mu_1<0, \quad x>0, \quad y<0,\\ u_{yy}-u_{xx}-\mu_2 u(0,x+y), & \mu_2>0, \quad x<0, \quad y>0,\\ u_{yy}-u_{xx}-\mu_3 u(1,x-y), & \mu_3>0, \quad x>1, \quad y>0.\end{cases}$$

Литература

1. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука. 2006.

2. Исломов Б., Холбеков Ж.А.Исследование краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа. //ДАН РУз. Математика. 2015 . №6. С.11-14 .

3.Исломов Б. И., Холбеков Ж. А. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. 25(3). С. 407-422.

МЕТОД РОТЕ РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Худалов М. З.

Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия,
hmz@yandex.ru;

Для рассматриваемой задачи в работе [1] получена априорная оценка решения, построена разностная схема и доказана сходимость и устойчивость метода.

В работе исследуется метод Роте для третьей начально-краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто. Получена оценка скорости сходимости приближенного решения, построенного по методу Роте, к точному решению дифференциальной задачи.

Постановка третьей начально-краевой задачи

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u(x_0,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l, 0 < t <\leqslant T, \quad (1)$$

$$k(0,t)u_x(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t), \quad (2)$$

$$-k(l,t)u_x(l,t) = \beta_2(t)u(l,t) - \mu_2(t), \quad (3)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad (4)$$

где

$$0 < c_0 \leq k(x,t) \leq c_1, |q(x,t)|, |r(x,t)|, |r_x(x,t)|, |k_x(x,t)|, |\beta_1|, |\beta_2| \leq c_2, \quad (5)$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$ - дробная производная в смысле Капуто порядка α, $0<\alpha<1$.

Для задачи (1)–(4) при условия (5) построена схема Роте с помощью которого можно приблизить решение исходной краевой задачи решениями краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на слоях. Для решения поставленной краевой задачи получена априорная оценка

$$\|z^{j+1}\|_1 \leqslant M \sum_{j'=1}^{j} (\|\Psi^{j'}\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2)\tau,$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от τ. Из полученной априорной оценки, при определенных условиях гладкости на входные данные, следует сходимость метода Роте со скоростью $O(\tau^2)$ в сеточной норме.

Литература

1. Бештоков М.Х., Худалов М.З. Третья краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто //Математика и математическое моделирование. 2020г., №3. С. 52–64.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Хубиев К. У.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
khubiev_math@mail.ru

Рассмотрим нагруженное [1] уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(x_1, y) = 0, \ \ y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u(x_2, y) = 0, \ y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками прямых $x = 0$, $x = r$, $y = T > 0$ при $y > 0$, характеристиками $x + y = 0$, $x - y = r$ уравнения (1) и прямой $y = -x_2$ при $y < 0$, $x_1 \in [0, r]$, $x_2 \in]0, r/2]$, $\lambda_1, \lambda_2 = const$.

Через Ω_1 и Ω_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно. *Регулярным* в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_2) \cap C^2_x(\Omega_1)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, такую, что $u_y(x, 0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на концах интервала $0 < x < r$ прямой $y = 0$.

Задача N. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:* $u(0, y) = \varphi_0(y), \ 0 \le y \le T$;

$$u(x_0, y) = \alpha(y) u(r, y) + \beta(y), \ 0 < x_0 < r; \tag{$*$}$$

$$u(x, -x) + \gamma(x) u(x_2, -x) = \psi(x), \ 0 \le x \le x_2; \quad u(x, -x_2) = \rho(x), \ x_2 \le x \le r - x_2,$$

где $\alpha(y), \beta(y), \varphi_0(y), \gamma(x), \psi(x), \rho(x)$ – заданные функции.

В [2] были исследованы различные локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического типа, а также рассмотрена задача для модельного параболического уравнения с условием общего вида $u(0, y) = \alpha_j(y) u(x^j, y) + \delta(y)$, и ее практические приложения. Эти условия в [3] названы нелокальными условиями А.М. Нахушева. В [4] приведена более подробная библиография работ, в которых исследовались задачи с условиями типа (*). В [5] выписано решение задачи Коши и аналогов задач Дарбу и Гурса для уравнения (1) при $y < 0$. В данной работе исследуются существование и единственность решения задачи **N**.

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. 1995. М.: Высш. шк. 301 с.

2. Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженного интегродифференциального уравнения гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги// Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.

3. Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса// Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.

4. Хубиев К.У. Задача БицадзеЧСамарского для нагруженного гиперболо-параболического уравнения с вырождением порядка в области его гиперболичности// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021. Т. 198. С. 123Ц132.

5. Аттаев А.Х. Краевые задачи для нагруженного волнового уравнения// Вестник Карагандинского университета. Серия: Математика. 2017. № 2 (86). С. 8–13.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Худайберганов Я. К.[1], Оринбаев А. А.[2]

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
[1]komilyashin89@mail.ru [2]abdiraxmanoffical@gmail.com

В данной работе рассматривается краевая задача для неоднородного уравнения в частных производных параболического типа с двумя линиями вырождения, получено представление решения, выведена априорная оценка решения, получены теоремы, доказывающие единственность и условную устойчивость на множестве корректности решения. Кроме того, построены приближенные решения, устойчивые на множестве корректности.

Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times Q$, где $\Omega_1 = \{-1 < x < 1,\ x \neq 0\}$, $\Omega_2 = \{-1 < y < 1,\ y \neq 0\}$, $Q = \{0 < t < T,\ T < \infty\}$.

Задача. Требуется найти функцию $u(x, y, t)$, связанные в области Ω с уравнением

$$u_t(x,y,t) + sgn(x)u_{xx}(x,y,t) + sgn(y)u_{yy}(x,y,t) + Au(x,t) = f(x,y,t), \tag{1}$$

и удовлетворяющими условиями:
начальным

$$u(x,y,t)|_{t=0} = \varphi(x,y),\ \ (x,y) \in [-1;1]^2, \tag{2}$$

граничным

$$\begin{gathered} u_x(x,y,t)|_{\partial\Omega_1} = 0,\ (y,t) \in [-1;1] \times \bar{Q}, \\ u_y(x,y,t)|_{\partial\Omega_2} = 0,\ (x,t) \in [-1;1] \times \bar{Q}, \end{gathered} \tag{3}$$

и условиям склеивания

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0} = (-1)^i \left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ \ (y,t) \in [-1;1] \times \overline{Q}, \\ \left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} = (-1)^i \left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ \ (x,t) \in [-1;1] \times \overline{Q}\,, \end{gathered} \tag{4}$$

где A – некаторые константа, $(i = \overline{0,1})$, $\varphi(x,y)$ – заданная достаточно гладкая функция, причем $\varphi_x(x,y)|_{\partial\Omega_1} = 0,\ \ \varphi_y(x,y)|_{\partial\Omega_2} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. LavrentЎev M. M. and Saveliev L. Ya., Theory of Operators and Ill-Posed Problems, Inst. Mat., Novosibirsk 2010.

2. Fayazov K. S. and Khudayberganov Y. K., Ill-posed boundary-value problem for a system of partial differential equations with two degenerate lines.// Zh. Sib. Fed. Univ., Mat., Fiz., 12,2019, No. 3,Pp 392Ц401.

О ДВУХТОЧЕЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ КОШИ

Худойкулов Ш. Ш.

Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства
xudoykulov1194@gmail.com

В связи с существенно возросшими за последние десятилетия возможностями вычислительной техники в прикладной математике начинают находить применение сложные математические модели, учитывающие значительно большее количество физических факторов. В этой связи следует особо отметить, что процессы вибрации тесно связаны именно с многоточечными обратными задачами для гиперболических уравнений [1, 2]. С этой целью в данной работе с использованием результатов полученных в [2, 3], исследуется однозначная разрешимость некоторой линейной двухточечной обратной задачи (ЛДОЗ) для трехмерное волнового уравнения.

В параллелепипеде $G = (0,1) \times (0,T) \times (0,l) = Q \times (0,l) \subset R^3$ рассмотрим трехмерное волновое уравнение.

$$Lu = u_{tt} - \Delta u + c(x,t)u = g(x,t,y) + \sum_{i=1}^{2} h_i(x,t) f_i(x,t,y), \tag{1}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ – оператор Лапласа. Здесь $g(x,t,y)$ и $f_i(x,t,y)$, $i = 1,2$ – заданные функции, $h_1(x,t)$, $h_2(x,t)$ – неизвестные функции.

Линейная двухточечная обратная задача (ЛДОЗ). Найти функции $\{u(x,t,y), h_1(x,t), h_2(x,t)\}$, удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующими краевыми условиями

$$u\,|_{t=0} = u_0,\ u_t\,|_{t=0} = u_1, \tag{2}$$

$$u\,|_{x=0} = u\,|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

$$u\,|_{y=0} = u\,|_{y=l} = 0 \tag{4}$$

Кроме того, решение задачи (1)-(4) удовлетворяет дополнительными условиями

$$u(x,t,\ell_j) = \varphi_j\,(x,t), \tag{5}$$

где $\ell_j \in (0,\ell)$, $j = 1,2$ такие, что $0 < \ell_1 < \ell_2 < \ell < +\infty$, а функции $u(x,t,y)$ и $h_i(x,t)$, $i = 1,2$ принадлежат классу

$$U = \{(u, h_i,\ i = 1,2),\ u \in W_2^2(G),\ D_y^3(u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}) \in L_2(G),\ h_i \in W_2^2(Q)\}.$$

Литература

1. Бицадзе А.В. О нелокальных краевых задачах // ДАН СССР, 1989, т. 277, №1. –С.17-19.

2. Джамалов.С.З. О корректности некоторых линейных многоточечных задач управления для волнового уравнения и уравнения Пуассона // ДАН РУз. 1992. №6 – 7. –С. 9–11.

3. Джамалов.С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент.2021. 176 с.

НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ НЕМОДЕЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНЫМИ ОСОБЫМИ, СЛАБО-ОСОБЫМИ И СИЛЬНО ОСОБЫМИ ЯДРАМИ

Хушвахтзода М. Б.[1]

[1]Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан,
e-mail-muhuddin_93@mail.ru

В настоящей работе изучается трехмерное немодельное интегральное уравнение типа Вольтерра с граничными слабо-особыми, особыми и сильно особыми ядрами в области $\Omega=\{(x,y,z):0\le a<x<\infty, 0\le b<y<b_0, 0\le c<z<c_0\}$, которую назовем прямоугольной трубой.

$$\varphi(x,y,z)+\int_x^\infty\frac{A(t)\varphi(t,y,z)}{(t-a)^\alpha}dt+\int_b^y\frac{B(s)\varphi(x,s,z)}{(s-b)^\beta}ds+\int_c^z\frac{C(\tau)\varphi(x,y,\tau)}{\tau-c}d\tau+$$
$$+\int_x^\infty\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y\frac{A_1(t,y)\varphi(t,y,z)}{(s-b)^\beta}ds+\int_x^\infty\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_c^z\frac{B_1(t,\tau)\varphi(t,y,\tau)}{\tau-c}d\tau+$$
$$+\int_b^y\frac{ds}{(s-b)^\beta}\int_c^z\frac{C_1(s,\tau)\varphi(x,s,\tau)}{\tau-c}d\tau+\int_x^\infty\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times$$
$$\times\int_c^z\frac{D(t,s,\tau)\varphi(t,s,\tau)}{\tau-c}d\tau=f(x,y,z),\qquad(1)$$

где $A(x),B(y),C(z)$- заданные функции точек ребер $\Im_1,\Im_2,\Im_3$, $A_1(x,y),B_2(x,y),C_3(x,y)$, заданные функции точек областей $D_1,D_2,D_3,D(x,y)$- заданная функция точек области Ω, $f(x,y,z)$- заданная функция, $\varphi(x,y,z)$- искомая функций, $0<\alpha<1$ и $\beta>1$.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\varphi(x,y,z)\in C(\overline{\Omega})$, обращающееся в нуль при $x\to\infty, y\to b, z\to c$ соответственно с асимптотическими поведениями:

$$\varphi(x,y,z)=o[x^{-\zeta_1}],\zeta_1>1-\alpha,$$
$$\varphi(x,y,z)=o[(y-b)^{\gamma_1}],\gamma_1>\beta-1,y\to b,$$
$$\varphi(x,y,z)=o[(z-c)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,z\to c.$$

Отметим, что при решении данного интегрального уравнения используется данных дифференциальными уравнениями первого порядка со слабо-сингулярными, сингулярными и сильно-сингулярными коэффициентами. После устанавливается, что от полученного решения и правой части нет необходимости требовать дифференцируемости достаточно о правой части трехмерного интегрального уравнения с граничными особыми,слабо-особыми и сильно-особыми ядрами требовать непрерывности и обращения в нуль с определенной асимптотикой на особых областях. Доказано, что в зависимости от знака коэффициентов уравнения, явное решение модельного трехмерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами может содержать от одного до трех произвольных функций, двух переменных, также определен случай, когда решение интегрального уравнения единственно.

НЕКОММУТАТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА-КАНТОРОВИЧА

Чилин В. И.[1], Закиров Б. С.[2]

Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан;
[1]vladimirchil@gmail.com; [2]botirzakirov@list.ru

Пусть H – гильбертово пространство, $B(H)$ – $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов в H, $\mathbf{1}$ – тождественный оператор в H. Пусть M – конечная алгебра фон Неймана, действующая в H, $Z(M)$ – центр алгебры фон Неймана M, $P(M) = \{p \in M : p^2 = p = p^*\}$ — решетка всех проекторов из M.

Пусть $S(M)$ – $*$-алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к M. Для каждого подмножества $E \subset S(M)$ через E_h (соответственно, E_+) обозначается множество всех самосопряженных (соответственно, положительных) операторов из E. Каждое $x \in S(M)$ имеет полярное разложение $x = u|x|$, где $|x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}} \in S(M)$, u – частичная изометрия из M. Если $x \in S_h(M)$ и $\{E_\lambda(x)\}$ – спектральное семейство проекторов для x, то $\{E_\lambda(x)\} \subset P(M)$.

Пусть $\mathcal{A}$ – подалгебра фон Неймана в $Z(M)$. Так как M – конечная алгебра фон Неймана, то $S(\mathcal{A})$ является коммутативной $*$-подалгеброй в $S(M)$. При этом, алгебра $S(\mathcal{A})$ $*$-изоморфна $*$-алгебре $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых комплексных функций, определенных на некотором измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются).

Пусть $T : M \to S(\mathcal{A})$ точный нормальный $S(\mathcal{A})$-значный след на M. След T называется *следом Магарам*, если для любых $x \in M_+$, $0 \le f \le T(x)$, $f \in S(\mathcal{A})$, существует такое $y \in M_+$, что $y \le x$ и $T(y) = f$.

Будем говорить, что сеть $\{x_\alpha\} \subset S(M)$ сходится к $x \in S(M)$ по точному нормальному $S(\mathcal{A})$-значному следу T (запись $x_\alpha \xrightarrow{T} x$), если для любого $\lambda > 0$ сеть $\{T(\mathbf{1} - E_\lambda(|x_\alpha - x|))\}$ сходится к нулю локально по мере относительно меры μ. Оператор $x \in S(M)$ называется T-*интегрируемым*, если существует такая последовательность $\{x_n\} \subset M$, что $x_n \xrightarrow{T} x$ и $T(|x_n - x_m|) \to 0$ локально по мере относительно меры μ при $n, m \to \infty$. В этом случае существует такой оператор $\widehat{T}(x) \in S(\mathcal{A})$, что $T(x_n) \xrightarrow{T} \widehat{T}(x)$. Пусть $L^1(M,T)$ множество всех T-интегрируемых операторов из $S(M)$ и $\|x\|_1 = \widehat{T}(|x|)$, $x \in L^1(M,T)$. Известно, что $(L^1(M,T), \|\cdot\|_1)$ является пространством Банаха-Канторовича.

Положим $S_{++}(\mathcal{A}) = \{f \in S_+(\mathcal{A}) : \ s(f) := \sup\limits_{n \ge 1}\{|f| > n^{-1}\} = \mathbf{1}\}$.

Пусть $\Phi : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ – функция Орлича, т.е. непрерывная выпуклая возрастающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi(t) > 0$ для некоторого $t > 0$. Пусть T – след Магарам на M. Известно, что $\Phi(x) = \int_0^\infty \Phi(\lambda) dE_\lambda(x) \in S_+(M)$ для всех $x \in S_+(M)$. Определим $S(\mathcal{A})$-пространство Орлича

$$L_\Phi(M,T) = \{x \in S(M) : \Phi(f^{-1}|x|) \in L^1(M,T) \ \text{ для некоторого } \ f \in S_{++}(\mathcal{A})\}.$$

На $L_\Phi(M,T)$ определим $S(\mathcal{A})$-значную норму Люксембурга, полагая

$$\|x\|_\Phi := \inf\{f \in S_{++}(\mathcal{A}) : \widehat{T}(\Phi(f^{-1}|x|)) \le \mathbf{1}\}.$$

Теорема. Пара $(L_\Phi(M,T), \|\cdot\|_\Phi)$ является пространством Банаха-Канторовича.

ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ФРАНКЛЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Чориева С. Т.[1], Хамидова С. З.[1]

Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан

[1]sanamchoriyeva3@gmail.com,

Пусть Ω – конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0. \quad (1)$$

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежашие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$.

Настоящий задача посвящена доказательству теоремы единственности решения задачи с аналогами условия Франкля на характеристике AC и на отрезке вырождения AB. Исследованию задач для вырожденных случаев т. е. когда коэффициенты при неизвестных в основных соотношениях обращается в нуль исследованных в работах.

Задачи FN**.** Найти в области Ω функцию $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

2) функция $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области Ω^-;

3) на интервале вырождения выполняется условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x \in I \setminus \{c\}, \quad (2)$$

причем эти пределы при $x = 1$ могут имет особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/(2(m + 2)), I = (-1, 1)-$ интервал оси $y = 0$;

4) выполнены

$$u(x, \sigma_0(x)) = a_0(x)u(x, 0) + \varphi(x),\ x \in \overline{I}, \quad (3)$$

$$a(x)D^{1-\beta}_{-1,x}u\left[\theta(x)\right] + b(x)D^{1-\beta}_{x,1}u\left[\theta(-x)\right] = \psi(x), u(-x, 0) - u(x, 0) = f(x),\ x \in \overline{I}, \quad (4)$$

где $D^{1-\beta}_{-1,x}$ и $D^{1-\beta}_{x,1}$ операторы дробного дифференцирования, $\theta(x_0)$ и $\theta(-x_0)$ соответственно, аффиксы точек пресечения характеристики AC с характеристикой выходящей из точки $(x_0, 0)$ и $(-x_0, 0)$, $x_0 \in I$, $\varphi(x), \psi(x), a(x), b(x), f(x)$ заданные функции, причем $f(-x) = -f(x)$

$$(1 - x)^{\beta}a(x) - (1 + x)^{\beta}b(x) = 0. \quad (5)$$

Условия (4) являются аналогами условия Франкля, заданные, соответственно, на характеристике AC и на отрезке вырождения AB.

Данная работа посвящена к вырожденному случаю когда выполнено условия (5), в силу которого здесь нельзя применит принцип экстремума для доказательство единственности решения задачи FN. Здесь изложен нестандартный подход доказательства единственности решения сформулированной задачи.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ ОДНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ

Шадиметов Х. М.[1], Атамурадова Б. М.[2]

Институт математики имени В.И. Романовского, АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
[1]kholmatshadimetov@mail.ru; [2]bahsandatamuradova@gmail.com

Известно, что интерполяция имеет важное теоретическое и практическое значение при аппроксимации функций заданными табличными значениями. В математике и ее приложениях многие практические задачи решаются с помощью интерполяции.

В связи с этим рассмотрим следующую интерполяционную формулу:

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(x_\beta), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x,z) = \delta\left(x-z\right) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x-x_\beta), \tag{2}$$

где $C_\beta(z)$ – коэффициенты, а x_β – узлы интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$, $x_\beta \in [0,1]$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $W_2^{(1,0)}(0,1)$. Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\|\varphi(x)\|_{W_2^{(1,0)}} = \left[\int_0^1 \left(\varphi'(x)-\varphi(x)\right)^2 \mathrm{dx}\right]^{1/2}. \tag{3}$$

Задача построения оптимальной интерполяционной формулы в пространстве $W_2^{(1,0)}$ это вычисление следующей величины:

$$\left\|\mathring{\ell}\right\|_{W_2^{(1,0)*}} = \inf_{C_\beta(z)} \|\ell\|_{W_2^{(1,0)*}} \tag{4}$$

т.е. в нахождении минимум нормы функционала погрешности (2) по коэффициентам $C_\beta(z)$ при фиксированных узлах x_β.

Имеет место

Теорема. Квадрат нормы функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1) в пространстве $W_2^{(1,0)}(0,1)$ определяется следующей формулой

$$\left\|\mathring{\ell}|W_2^{(1,0)*}(0,1)\right\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{\beta=0}^{N} \mathring{C}_\beta(z)\cdot \operatorname{sgn}(z-h\beta)\cdot \operatorname{sh}(z-h\beta).$$

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

Шадиметов Х. М.[1,2], Усманов Х. И.[2]

Ташкентский государственный транспортный университет[1], Ташкент, Узбекистан

Институт математики им. В.И.Рамановского АН РУз[2], Ташкент, Узбекистан

hojiakbar170853@mail.ru

Для построения оптимальной квадратурной формулы для интегралов со степенно–логарифмическими ядрами в пространстве $L_2^{(m)}(0,x)$ в формулах приведенной работы [1] заменим верхний предел интегрирования на и весовой функции следующим образом:

$$\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}\varphi(s)ds \cong \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta^{(k)}\varphi_\beta^{(k)}, m=1,2,. \qquad (1)$$

Здесь $0<\alpha<1, 0\le s<x\le 1, \beta>x, \varphi_\beta^{(k)}=\varphi^{(k)}(s_\beta), s_\beta-$ узлы сетки, $C_\beta^{(k)}-$ оптимальные коэффициенты квадратурной формулы (1), которых необходимо определить.

Для решения данной задачи справедлива утверждение следующей теоремы.

Теорема. Оптимальные коэффициенты квадратурной формулы вида (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,x)$ определяются следующими формулами

$$C_0^{(k)}=0.5p_k+(-1)^k h^{-1}[F_{k1}-F_{k0}], C_N^{(k)}=0.5p_k+(-1)^k h^{-1}[F_{kN-1}-F_{kN}]), \qquad (2)$$

$$C_\beta^{(k)}=(-1)^k h^{-1}[F_{k\beta-1}-2F_{k\beta}+F_{k\beta+1}]), \beta=1,2,...,N-1, \qquad (3)$$

Здесь

$$F_{k\beta}=f_{k\beta}-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\gamma=0}^{N}(-1)^i C_\gamma^{(i)}\frac{(h\beta-h\gamma)^{k-i+1}sign(h\beta-h\gamma)}{2(k-i+1)!}, \beta=0,1,...,N,$$

$$f_{k\beta}=\frac{(-1)^k(x-h\beta)^{\alpha+k+1}}{P_{k+1}}[\ln\frac{\nu}{x-h\beta}+S_{k+1}]-\frac{(-1)^k}{2}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{(-h\beta)^i x^{\alpha+k+1-i}}{i!P_{k+1-i}}[\ln\frac{\nu}{x}+S_{k+1-i}],$$

$$p_k=\frac{g_k}{k!}-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma^{(i)}\frac{(h\gamma)^{k-i}}{(k-i)!}, g_k=\int_0^x(x-s)^{\alpha-1}\ln\frac{\nu}{x-s}s^k ds, k=0,1,...,m-1,$$

$$P_k=\prod_{i=0}^{k}(\alpha+i), S_k=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{\alpha+i}, k=0,1,...,m.$$

С помощью формул (2)–(3) определяются оптимальные коэффициенты квадратурной формулы (1). Это квадратурная формула не только для вычисления интегралов ещё применяя её можно решить интегральные уравнения и интегро–дифференциальные уравнения со степенно–логарифмическими ядрами.

К ТЕОРИИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ГРАНИЧНЫМИ СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

Шоймкулов Б.М.

Таджикский Национальный университет, Душанбе, Таджикистан,
boitura@mail.ru

Обозначим через D треугольную область, ограниченную отрезками $\Gamma_1 = \{0 < x < a_0, y = 0\}, \Gamma_2 = \{0 < x < a_0, y = x\}, \Gamma_3 = \{x = a_0, 0 < y < a_0\}$.

В области D рассмотрим переопределенную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{a_1(x,y)}{(x-y)^\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{(x-y)^\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}v + \dfrac{f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{a_2(x,y)}{(x-y)^\beta}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{b_2(x,y)}{(x-y)^\beta}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{c_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+1}}v + \dfrac{f_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+1}}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{a_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{b_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{c_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}v + \dfrac{f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha = const > 1$, $\beta = const > 1$, $\gamma = const > 1$ $a_j(x,y)$, $b_j(x,y)$, $c_j(x,y)$, $f_j(x,y)(1 \leq j \leq 3)$ – заданные функции класса $C^1(D) \cap C^2(\overline{D})$, $v(x,y)$ – искомая функция.

В настоящей работе найдено многообразие решений переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с граничными сверхсингулярными линиями в явном виде через три произвольные постоянные. Определяются условия совместности системы уравнений. Ставится и решается задача типа Коши.

Литература

1. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душанбе.: ТГУ, 1992 (учебное пособие по спецкурсу).236 с.

2. Шоймкулов Б.М. Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и одной сверхсингулярной точкой. Вестник Пермского университета. Серия: Матем. Механ. Информ. 2020. №3 (50).- С.17-23.

3. Шоймкулов Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией. Вестник Пермского университета. Матем. Механ. Информ. 2021. №2 (53). - С. 5-9.

4. Шоймкулов Б.М. Интегральное представление многообразия решений для переопределенных систем дифференциальных уравнений с одной слабой и одной сингулярной линией в общем случае. Вестник Филиала МГУ им. М.В.Ломоносова в городе Душанбе. 2022. Т. 1. №3 (25). - С. 39-48.

ОБ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ-ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОЛУНЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Шакиров А. А.

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан, shokirov.abduvosiq96@gmail.com

В области

$$G = (-1,1)\times(0,T)\times(0,\ell) = Q\times(0,\ell) = \{(x,t,y)|\ -1 < x < 1,\ 0 < t < T,\ 0 < y < \ell\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - au_{xx} - u_{yy} + \alpha(x,t)u_t = c(x,t)u + \psi(x,t,y), \tag{1}$$

где a – достаточно большое число, $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t)\cdot f(x,t,y)$, $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ – заданные функции, а функции $h(x,t)$ и $c(x,t)$ подлежат определению.

Коэффициентная обратная задача

Найти функции $u(x,t,y),\ h(x,t),\ c(x,t)$, удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в области G, такие, что $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующим :

1) полунелокальным краевым условиям

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, p = 0,1 \tag{2}$$

$$u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\ell} = 0 \tag{4}$$

где γ – некоторое постоянное число, отличное от нуля;

2) дополнительным условиям

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0(x,t) \tag{5}$$

$$u(x,t,\ell_1) = \varphi_1(x,t), \tag{6}$$

$$0 < \ell_0 < \ell_1 < \ell < +\infty$$

и вместе с функциями $h(x,t)$, $c(x,t)$ принадлежит классу

$$U = \left\{(u,\ h,\ c)|\ u \in W_2^{2,3}(G),\ h \in W_2^2(Q),\ c \in W_2^2(Q),\quad \|c\|^2_{W_2^2(Q)} \le r\right\}$$

где r – положительное число точное значения которого будет определено в ходе работы.

Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\langle u\rangle^2_{l,s} = \|u\|^2_{W_2^{l,s}(G)} = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k^2)^s\,\|u_k\,(x,t)\|^2_{W_2^l(Q)}\,, \tag{A}$$

где $W_2^l(Q)$ пространства Соболева, $u_k(x,t)$ означает коэффициенты Фурье функции $u(x,t,y)$, $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}, k = 1,2,3....$

Литература

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент. 2021г. с-176.

БИОЛОГИЧЕСКАЯ ИНВАЗИЯ В МОДЕЛИ ХИЩНИК-ЖЕРТВА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Элмуродов А. Н.

Институт математики Академия наук УзР, Ташкент, Узбекистана,
elmurodov@mathinst.uz

В математической экологии иммиграция новых видов является одной из самых важных тем. С точки зрения математической экологии различные модели инвазии в последнее время выдвигались и исследовались многими математиками-экологами. Например, [1,2] предложили популяционные модели реакции-диффузии со свободной границей, чтобы понять процесс новой или инвазивной популяции.

В процессе расселения хищников некоторые из них погибают от голода, холода и болезней. Мы хотим понять, как уровень смертности влияет на распространение. Поведение хищничества всегда меняется в зависимости от размера жертвы, и многие экологи отмечают, что функциональная реакция, зависящая от соотношения, более разумна для описания процесса хищничества для некоторых хищников. Основываясь на этих фактах, мы рассматриваем следующую реакционно-диффузионную систему хищник-жертва со свободной границей, включающую член смерти:

$$\begin{cases} a(u)u_t - u_{xx} - m_1 u_x = u\left(1-u\right) - \frac{uv}{u+mv}, \quad D = \{(t,x) : 0 < x < s(t), t > 0\} \\ b(v)v_t - dv_{xx} - m_2 v_x = kv\left(1 - \frac{bv}{u+av}\right), \quad D = \{(t,x) : 0 < x < s(t), t > 0\}, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0 = s(0) < l, \\ u_x(t,0) = v_x(t,0) = u(t,s(t)) = v(t,s(t)) = 0, \quad t > 0, \\ \dot{s}(t) = -\mu(u_x(t,s(t)) + \rho v_x(t,s(t))), \quad t > 0, \end{cases}$$

где $x = s(t)$ представляет определяемую движущуюся границу; $u(t,x)$ выражает плотность популяции видов-хищников, а $v(t,x)$ обозначает плотность популяции видов-жертв. a, b, d,m, k,ρ μ и m_i $(i = 1,2)$ положительные константы. Подробное значение этих коэффициентов можно узнать из [2]. Хищник $v(t,x)$ это захватчик, который изначально существует в подинтервале $[0,s_0]$ из $[0,l]$ и имеет условия Лесли-Гауэра, которые измеряют потерю популяции хищников из-за редкости добычи. Жертва u (аборигенный вид) изначально распределена по всей области $[0,L]$. Наша основная цель понять, как исходные данные $v_0(x)$ влияют на успех или неудачу вторжения хищника. Мы выводим дихотомию расширения и исчезновения и даем четкие критерии расширения и исчезновения в этой модели.

Литература

1. Yang R., Wei J. The effect of delay on a diffusive predatorЏprey system with modified Leslie - Gower functional response. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. №40:1, (2017), 51 - 73.

2. Elmurodov A.N., Rasulov M.S. On a Uniqueness of Solution for a Reaction - Diffusion Type System with a Free Boundary, Lobachevskii Journal of Mathematics №43:8, (2022), 2099-2106.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАРШРУТОВ ТРАЕКТОРИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ЛОТКИ - ВОЛЬТЕРРЫ

Эшмаматова Д. Б.[1], **Ганиходжаев Р. Н.**[2]
[1]Ташкентский Государственный Транспортный Университет,
Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан
24dil@mail.ru;
[2] Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
rganikhodzhaev@gmail.com

Работа посвящена исследованию и нахождению маршрутов траекторий вырожденных отображений Лотки–Вольтерры. В работе вводим новое определение маршрута траектории, для неподвижной точки понятие положительного и отрицательного бассейна, а также скорости для отображений такого вида. В расширенной статье предложим новый подход к исследованию и нахождению маршрутов, разбивая симплекс на части, согласно построенной сигнатуре. Полученные аналитические результаты работы применимы в задачах эпидемиологии, экологии и экономики [1].

Известно [1], что дискретный вариант оператора Лотки – Волтерры на симплексе $S^{m-1} = \{x \in R^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1; x_i \geq 0\}$ определяется заданием вещественной кососимметрической матрицы $A = (a_{ki})$ с условием $|a_{ki}| \leq 1$ и действует согласно следующему закону

$$x'_k = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i), k = \overline{1, m},$$

введенному в работах [1]–[3], где $x' = (x'_1, ..., x'_m) = Vx$ и $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$.

Ясно, что решения неравенств $\sum_{i=1}^m a_{ki}x_i > 0$ при некоторых k, и $\sum_{i=1}^m a_{ki}x_i < 0$ при остальных k на симплексе S^{m-1} определяют какие координаты возрастают, а какие убывают. Очевидно, что множества решений неравенств, если они непустые, являются открытым выпуклым многогранником на симплексе. Маршруты траекторий определим, как порядок прохождения траектории по этим многогранникам. В работе определены возможные маршруты траекторий оператора V, когда A является блочной кососимметрической матрицей.

Определение 1. Вектор $Vx - x$ называется скоростью отображения V в точке x.

Определение 2. Последовательность прохождения траектории через многогранники называется маршрутом траектории.

Литература

1. Seytov Sh. J., Eshmamatova D.B. Discrete Dynamical Systems of LotkaЏVolterra and Their Applications on the Modeling of the Biogen Cycle in Ecosystem // Lobachevskii journal of mathematics. 2023. 44(4). P. 1462-1476.

2. Tadzhieva M. A., Eshmamatova D. B., and Ganikhodzhaev R. N. Volterra-Type Quadratic Stochastic Operators with a Homogeneous Tournament // Journal of Mathematical Sciences. 2024. 278(3). P. 398–402.

2. Eshmamatova D.B., Tadhzieva M.A., Ganikhodhzaev R.N. Criteria for the Existence of Internal Fixed Points of Lotka-Volterra Quadratic Stochastic Mappings with Homogeneous Tournaments Acting in an (m-1) - Dimensional Simplex// Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2023. 12(4). P. 679–688.

СИЛЬНЫЙ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Эшматов Б. Э.[1], Шоимов Б.[2]
[1,2]Университет экономики и педагогики,г.Карши, Узбекистан,
eshmatovbahodir@mail.ru1;

Отметим, что вопросы разрешимости и спектральные свойства локальных и нелокальных задач для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго и третьего порядков изучены в [1]-[2].

$$Lu = f((x, y) \tag{1}$$

где

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x}\begin{cases} u_x - u_{yy}, y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, y < 0 \end{cases}$$

З а д а ч а БМ. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AA_0 \cup A_0 B_0} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AA_0 \cup AC} = 0, \tag{3}$$

$$[u_x - u_y]\left[\theta_0(t)\right] + \mu(t)\left[u_x - u_y\right]\left[\theta^*(t)\right] = 0 \tag{4}$$

Функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем с и л ь н ы м решением задачи БМ если существует последовательность функции $\{u_n\}, u_n \in W$, такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ к u и f соответсвенно.

Т е о р е м а 1. Для любой $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи БМ. Это решение принадлежит классу $C\left(\bar{\Omega}\right) \cap W_2^1(\Omega)$, удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_1 \le c\|f\|_0 \tag{5}$$

и представимо в виде

$$u(x, y) = \iint\limits_{\Omega} K(x, y, x_1, y_1)\, f(x_1, y_1)\, dx_1 dy_1 \tag{6}$$

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: ФАН. 1979. 240 с.

2. Бердышев А.С. О вольтерровости аналога задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка. //Узбекский математический журнал 1996. №2. с. 22-31.

DIFFERENSIAL-AYIRMALI TENGLAMALARNI YECHISHNING BIR USULI

Abduolimova G. M.[1], Sharipova S. T.[2]
Andijon davlat universiteti, Andijon, O'zbekiston
[1]abduolimova81@inbox.ru; [2]soraxonsharipova@gmail.com;

Quyidagi (1) tenglama berilgan bo'lsin:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) + f(t), \tag{1}$$

bu yerda, A, B n – tartibli o'zgarmas kvadrat matritsalar [1].

(1) tenglama uchun boshlang'ich holat [-h,0] kesmada aniqlangan n- o'lchovli $\varphi(t)$ absolyut uzluksiz funksiya. $h \le t \le 0$ da berilgan boshlang'ich holatlar (funksiyalar) to'plamini X bilan belgilaymiz, ya'ni

$$X = \{\varphi(\cdot) : z(t) = \varphi(t), \quad z(0) = \varphi(0) \in R^n, \quad -h \le t \le 0\}.$$

1-ta'rif. $K(t)$ quyidagi xossalarga ega bo'lgan yagona matritsali funksiya bo'lsin: a) $K(t)$ $=\tilde{0},\ t<0$, $\tilde{0}-n-$ tartibli nol matritsa; b) $K(0) = E$, bunda E n- tartibli birlik matritsa; c) $K(t-h)$ $[0, +\infty)$ da uzluksiz funksiya; d) $K(t)$ $t > 0$ da

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h), \tag{2}$$

matritsali differensial tenglamani qanoatlantiradi [3].

(1) tenglamani yechish uchun uning bir jinsli $\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h)$ ko'rinishini ketma-ket integrallash usuli bilan yechib olamiz:

(2) tenglamada $-h \le t \le 0$ oraliqda yechimi quyidagicha bo'ladi ya'ni,

$$K(t) = 0 \ \ da \ -h \le t < 0.$$

Endi tenglamani $0 \le t < h$ oraliqdagi yechimini qaraymiz;

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = 0 \\ K(0) = E \end{cases}$$

$K(t) = C,\ C_1 = E$ va (2) tenglamaning yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $K_1(t) = E$.

Shu tarzda (2) tenglamaga qolgan oraliqlarda ham yechim topib olamiz $h \le t < 2h$ da:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = BE \\ K(h) = E \end{cases}$$

$$K(t) = tBE + C_2, \qquad E = hBE + C_2, \qquad C_2 = E - hBE;$$

$$K(t) = tBE + E - hBE = (t-h)BE + E, \qquad K_2(t) = (t-h)BE + E.$$

$2h \le t < 3h$ da:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = (t-2h)B^2E + BE \\ K(2h) = hBE + E \end{cases}$$

$$K(t) = \frac{(t-2h)^2}{2!}B^2E + tBE + C_3, \qquad 2hBE + C_3 = hBE + E, \qquad C_3 = E - hBE;$$

$$K(t) = \frac{(t-2h)^2}{2!}B^2E + tBE + E - hBE = \frac{(t-2h)^2}{2!}B^2E + (t-h)BE + E;$$

$$K_3(t) = \frac{(t-2h)^2}{2!}B^2E + (t-h)BE + E.$$

$3h \leq t < 4h$ da:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = \frac{(t-3h)^2}{2!}B^3E + (t-2h)B^2E + BE \\ K(3h) = \frac{h^2}{2}B^2E + 2hBE + E \end{cases}$$

$$K(t) = \frac{(t-3h)^3}{3!}B^3E + \frac{(t-2h)^2}{2!}B^2E + tBE + C_4;$$

$$\frac{h^2}{2}B^2E + 3hBE + C_4 = \frac{h^2}{2}B^2E + 2hBE + E, \qquad C_4 = E - hBE;$$

$$K_4 = \frac{(t-3h)^3}{3!}B^3E + \frac{(t-2h)^2}{2!}B^2E + (t-h)BE + E$$

Yuqorida ko‘rgan barcha oraliqlardagi yechimlarimizdan quyidagicha qonuniyat kelib chiqadi:

$$K(t) = \eta(t)E, \qquad \eta(t) = \sum_{i=0}^{N} B^i \frac{(t-ih)^i}{i!}; \tag{3}$$

(3) tenglikdan xulosa qilib, umumiy holatda barcha $Nh \leq t < (N+1)h$, lar uchun quyidagi (4) tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$K(t) = E\sum_{i=0}^{N} B^i \frac{(t-ih)^i}{i!}, \qquad Nh \leq t < (N+1)h \tag{4}$$

(1) tenglamani yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$z(t) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} K(t-s-h)B\varphi(s)ds + \int_{0}^{t} K(t-s)f(s)ds.$$

Adabiyotlar

1. Дж. Хейл Теория функционально-дифференциальных уравнений Пер. с англ. –М.: Мир, 1984.–421 с, ил.

2. Беллман Р., Кук К. Дифференциального-разностные уравнения. –М.: Мир, 1967. –254 с.

3. Мамадалиев Н.А., Мустапокулов Х.Я., Абдуалимова Г.М. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т.33. Вып.1. - С 103-118.

KARRALI XARAKTERISTIKALI BIR TURDAGI UCHINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA HAQIDA

Ashurov Sh.[1], **Qudratov O.B.**[2].
Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti, Surxondaryo, O‘zbekiston;
ashurovshaxzod78@gmail.com

Quyidagi uchinchi tartibli karrali xarakteristikali klassik

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = f(x,y) \tag{1}$$

tenglama uchun quyidagi chegaraviy masalani qaraymiz:

(1) tenglamaning $D = (x,y) : 0 < x < 1, x < y < 1$ sohadagi $u(x,y) \in C^{2,1}(\bar{D}) \bigcap C^{3,2}(D)$ sinfdagi va quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

$$\alpha_0(x)u(x,0) + \alpha_1(x)u_y(x,0) = P_0(x), 0 \leq x \leq 1 \tag{2}$$

$$\beta_0(x)u(x,1) + \beta_1(x)u_y(x,1) = P_1(x), 0 \leq x \leq 1 \tag{3}$$

$$\gamma_0(y)u(0,y) + \gamma_1(y)u_x(x,0) = P_2(x), 0 \leq y \leq 1 \tag{4}$$

$$\mu_0(y)u(1,y) + \mu_1(y)u_{xx}(1,y) = P_3(y), 0 \leq y \leq 1 \tag{5}$$

$$u_x(1,y) = P_4(y), 0 \leq y \leq 1 \tag{6}$$

bu yerda $a_i(x,y), (i = \overline{0,2}), f(x,y), \alpha_i(x), \beta_i(x), \gamma_i(y), \mu_i(y)(i = \overline{0,1}), P_j(j = \overline{0,4})$ berilgan uzluksiz funksiyalar.

Ushbu berilganlarda qo‘yilgan talablar bajarilganda masala yechimi yagonaligi va mavjudligi masalasi hal qilingan. Yechimni yagonaligi Enersiya integrali usuli bilan, mavjudligi esa Volterra integral tenglamalar sistemasiga keltirilgan.

KASR TARTIBDA YUKLANGAN INTEGRO-DIFFERENSIYAL TENGLAMA UCHUN ARALASH MASALA

Baltayeva U. I.[1,2], Xasanov B. M.[1], Ergasheva M.[2]
[1] Khorazm Mamun akademiyasi
[2] Urganch davlat universiteti,
umida_baltayeva@mail.ru; xasanovboburjon.1993@gmail.com;
ergashevamahliyo@mail.ru

Aralash masala: Quydagi

$$L_\gamma^m(u) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - B_\gamma^x\right)^m u(x,t) = f(x,t) + \mu D_{0,t}^{-\alpha} u(x_0,t), x > 0, t > 0, \tag{1}$$

tenglamani,

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, x \geq 0, k = 0, m-1, \tag{2}$$

boshlang‘ich shartlarni va

$$\left.\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}}\right|_{x=0} = 0, t \geq 0, k = 0, m-1, \tag{3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantruvchi $u(x,t)$ yechimini aniqlang, bu yerda B_γ^x-Bessel operatori, $D_{0,t}^{-\alpha}$ kasr tartibli integral operator, $\gamma \in R, x_0 = canst, x_0 > 0, \gamma > -\frac{1}{2}$,$\alpha > 0, \mu \in R, m \in N$ $f(x,t)$-berilgan funksiya. Ushbu aralash masalani tadqiq etishda quydagi lemma muhim ahamiyatga ega.

Lemma. τ parametrga bog‘liq $\omega(x,t,\tau)$ funksiya quydagi

$$L_\gamma^m(\omega) \equiv 0, x > 0, t > \tau, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^k \omega(x,t,\tau)}{\partial t^k}\right|_{t=\tau} = 0, k = 0, m-2, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial^{m-1} \omega(x,t,\tau)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=\tau} = f(x,\tau) + \mu D_{0,\tau}^{-\alpha} \int_0^\tau \omega(x_0,\tau,s)\,ds, \tag{6}$$

masalani yechimi bo‘lsin, u holda,

$$u(x,t) = \int_0^t \omega(x,t,\tau) d\tau \tag{7}$$

funksiya (1)-(3) masalaning yechimi boladi.

UCHINCHI TIP KLASSIK SOHA AVTOMORFIZMLARI VA ULARNING BA'ZI XOSSALARI

Erkinboyev Q.S.[1,2], **Jumaboyev R.Sh.**[1]
[1]Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston
[2]Urganch Davlat universiteti, Urganch, O'zbekiston
qerkinboyev@gmail.com; r.jumaboyev95@mail.ru;

Uchinchi tip klassik soha $\Re_3(m,m)$-sohaning har bir elementi ushbu

$$I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0$$

munosabatni qanoatlantiruvchi m-tartibli kososimmetirik kvadrat matritsalardan iborat. Bunda $I^{(m)}$ -m-tartibli birlik kvadrat matritsa, $\bar{Z}$- Z ga qo'shma matritsa.

$\Re_3(m,m)$ uchinchi tip klassik soha avtomorfizmlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\varphi(Z) = (AZ + B)\left(-\bar{B}Z + \bar{A}\right)^{-1} = (ZB^* + A^*)^{-1}(ZA' - B'), \tag{1}$$

bu avtomorfizmlarning koeffitsiyentlari mos ravishda

$A^*A - B^*B = I^{(m)},\ A'B = -B'A$ va

$$A^*A - B'\bar{B} = I^{(m)},\ B^*A = -A'\bar{B} \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Agar $A = Q,\ A^{-1}B = -P$ deb belgilab (1) akslantirishni soddalashtirsak quyidagi $\varphi(Z) = Q(Z - P)\left(I + \bar{P}Z\right)^{-1}\bar{Q}^{-1}$ munosabatga ega bo'lamiz.

Ushbu

$$\varphi_P(Z) = Q(Z - P)\left(I + \bar{P}Z\right)^{-1}\bar{Q}^{-1} \tag{3}$$

(bu yerda $Z \in \Re_3(m,m)$, $\bar{Q}\left(I + P\bar{P}\right)Q' = I^{(m)}$, $QP + P\bar{Q} = 0$, $Q = Q^*$ (4)) akslantirish berilgan bo'lsin.

Teorema. $\varphi_P(Z)$ akslantirish uchun quyidagi xossalar o'rinli

$1^0.\varphi_P(P) = 0,\ \ \varphi_P(0) = P$;

$2^0.d(\varphi_P(P)) = QdZQ', d(\varphi_P(0)) = (Q^*)^{-1}dZ\bar{Q}^{-1}$;

3^0. Ixtiyoriy $Z, W \in \Re_3(m,m)$ uchun ushbu

$$\det(I - \langle\varphi_P(Z), \varphi_P(W)\rangle) = \frac{\det(I - \langle P,P\rangle)\cdot\det(I - \langle Z,W\rangle)}{\det(I - \langle Z,P\rangle)\cdot\det(I - \langle P,W\rangle)} \tag{5}$$

munosabat o'rinli;

4^0. Ixtiyoriy $Z \in \Re_3(m,m)$ uchun

$$\det(I - \langle\varphi_P(Z), \varphi_P(Z)\rangle) = \frac{\det(I - \langle P,P\rangle)\cdot\det(I - \langle Z,Z\rangle)}{\det(I - \langle Z,P\rangle)\cdot\det(I - \langle P,Z\rangle)}$$

5^0. $\varphi_P(\varphi_P(Z)) = Z$ (involyutsiya bo'lish xossasi);

6^0. $\varphi_P(Z)$ - gomeomorfizm bo'ladi. $\varphi_P(Z) \in Aut(\Re_3(m,m))$.

BIRINCHI TIP MATRITSAVIY SHAR AVTOMORFIZMLARI VA ULARNING BA'ZI XOSSALARI

Erkinboyev Q.S.[1,2], Jumaboyev R.Sh.[1], Qurbanov K.S.[2]
[1]Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston
[2]Urganch Davlat universiteti, Urganch, O'zbekiston
qerkinboyev@gmail.com; r.jumaboyev95@mail.ru; kamron–kurbanov@mail.ru

Ushbu [1]

$$B_{m,n} = \{Z = (Z_1, ..., Z_n) \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \quad I^{(m)} - \langle Z, Z \rangle > 0\} \tag{1}$$

to'plam ***matritsaviy shar*** deyiladi.

Matritsaviy sharning $P = (P_1, ..., P_n)$ nuqtasini 0 nuqtaga akslantiruvchi avtomorfizmi quyidagi ko'rinishda yozib olishimiz mumkin[1]:

$$W_k = R^{-1}(I^{(m)} - \langle Z, P \rangle)^{-1} \sum_{s=1}^{n} (Z_s - P_s) Q_{sk} \ , \quad k = 1, ..., n. \tag{2}$$

U holda (2) avtomorfizm koeffitsiyentlari m-tartibli R va Q_{sk} $s, k = 1, ..., n$, matritsalar ushbu

$$\begin{gathered} R^*(I^{(m)} - \langle P, P \rangle) R = I^{(m)} \\ Q^*(I^{(mn)} - P^* P) Q = I^{(mn)}. \end{gathered} \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiradi. Bu yerda Q va P^*P matritsalar blok matritsa bo'lib,

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11}\, Q_{12} \ldots Q_{1n} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ Q_{n1}\, Q_{n2} \ldots Q_{nn} \end{pmatrix}, P^*P = \begin{pmatrix} P_1^* P_1 & P_1^* P_2 & \ldots & P_1^* P_n \\ P_2^* P_1 & P_2^* P_2 & \ldots & P_2^* P_n \\ . & . & \ldots & . \\ P_n^* P_1 & P_n^* P_2 & \ldots & P_n^* P_n \end{pmatrix}.$$

ko'rinishda aniqlangan.

Aytaylik, $W = \varphi_P(Z) - B_{m,n}$ matritsaviy sharning $P \in B_{m,n}$ nuqtasini 0 nuqtaga o'tkazuvchi avtomorfizmi bo'lsin. U holda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema. $\varphi_P(Z)$ avtomorfizm koeffitsiyentlari uchun ushbu $RP_i + P_i Q_{ii} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n.)$ munosabatlar o'rinli bo'lsin. U holda bu avtomorfizm uchun quyidagi xossalar o'rinli.

1. Ixtiyoriy $Z, W \in B_{m,n}^{(1)}$ uchun quyidagi munosabat o'rinli

$$\det\left(I^{(m)} - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(W) \rangle\right) = \frac{\det\left(I^{(m)} - \langle P, P \rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \langle Z, W \rangle\right)}{\det\left(I^{(m)} - \langle Z, P \rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \langle P, W \rangle\right)}$$

2. Ixtiyoriy $Z \in B_{m,n}^{(1)}$ uchun quyidagi munosabat o'rinli

$$\det\left(I^{(m)} - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(Z) \rangle\right) = \frac{\det\left(I^{(m)} - \langle P, P \rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \langle Z, Z \rangle\right)}{\det\left(I^{(m)} - \langle Z, P \rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \langle P, Z \rangle\right)}$$

3. $\varphi_P(\varphi_P(Z)) = Z$. (involyutsiya bo'lish xossasi)

KARRALI XARAKTERISTIKALI UCHINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN CHIZIQLI BO‘LMAGAN CHEGARAVIY MASALA HAQIDA

Jo‘rayev B. B., Qudratov O. B., Xolboyev S. B.

Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti, Surxondaryo, O‘zbekiston;

xolboyevsanjar0911@mail.ru

Quyidagi uchinchi tartibli karrali xarakteristikali no klassik

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = f(x, y, u) \tag{1}$$

tenglama uchun quyidagi chegaraviy masalani qaraymiz:

(1) tenglamaning $D = (x, y) : 0 < x < 1, x < y < 1$ sohadagi $u(x, y) \in C^{2,1}(\overline{D}) \bigcap C^{3,2}(D)$ sinfdagi va quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

$$\alpha_0(x)u(x, 0) + \alpha_1(x)u_y(x, 0) = P_0(x), 0 \leq x \leq 1 \tag{2}$$

$$\beta_0(x)u(x, 1) + \beta_1(x)u_y(x, 1) = P_1(x), 0 \leq x \leq 1 \tag{3}$$

$$u(0, y) = P_2(x), 0 \leq y \leq 1 \tag{4}$$

$$u_x(1, y) = P_3(y), 0 \leq y \leq 1 \tag{5}$$

$$u_{xx}(1, y) = P_4(y), 0 \leq y \leq 1 \tag{6}$$

bu yerda $f(x, y, u), \alpha_i(x), \beta_i(x), (i = \overline{0, 1}), P_j(j = \overline{0, 4})$ berilgan uzluksiz funksiyalar.

Ushbu berilganlarda qo‘yilgan talablar bajarilganda masala yechimi yagonaligi va mavjudligi masalasi hal qilingan. Yechimning yagonaligi energiya integrali usuli bilan, mavjudligi esa integral tenglamalar sistemasiga keltirilgan.

FOK FAZOSIDAGI 3×3 OPERATORLI MATRISA XOS QIYMATLARINING SONI HAQIDA

Sharipova M. Sh.

Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston,
m.sh.sharipova@buxdu.uz

$\mathbb{T}^1$-bir o‘lchamli tor, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ - kompleks sonlar fazosi, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^1)$ - $\mathbb{T}^1$ bir o‘lchamli torda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatni qabul qiluvchi) funksiyalarning Hilbert fazosi va $\mathcal{H}_2 := L_2(\mathbb{T}^2)$ - $\mathbb{T}^2$ ikki o‘lchamli torda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatni qabul qiluvchi) funksiyalar Hilbert fazosi bo‘lsin. $\mathcal{H}$ orqali $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ va $\mathcal{H}_2$ fazolarning to‘g‘ri yig‘indisini belgilaymiz, ya’ni $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Operatorlar nazariyasidan yaxshi ma’lumki, $\mathcal{H}$ Hilbert fazosida ta’sir qiluvchi har qanday chiziqli chegaralangan operator hamisha uchinchi tartibli operatorli matrisa ko‘rinishida tasvirlanadi [1].

Zamonaviy matematik fizikada $\mathcal{H}$ Hilbert fazosiga Fok fazosining qirqilgan uch zarrachali qism fazosi deyiladi.

Bu fazoning ixtiyoriy f elementi $f = (f_0, f_1, f_2)$, $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2$ ko‘rinishga ega.

$\mathcal{H}$ Hilbert fazosida

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} & 0 \\ \mu A_{01}^* & A_{11} & \mu A_{12} \\ 0 & \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0 \tag{7}$$

ko‘rinishdagi uchinchi tartibli operatorli matrisani qaraymiz. Bu yerda $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \leq j$, $i, j = 0, 1, 2$ matrisaviy elementlar quyidagi formulalar orqali aniqlangan

$$A_{00} f_0 = \varepsilon f_0, \quad A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^1} \sin(3t) f_1(t) dt;$$

$$(A_{11} f_1)(x) = (\varepsilon + 1 - \cos(3x)) f_1(x), \quad (A_{12} f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}^1} \sin(3t) f_2(x, t) dt;$$

$$(A_{22} f_2)(x, y) = (\varepsilon + 2 - \cos(3x) - \cos(3y)) f_2(x, y), \ \ \varepsilon \in \mathbb{R}, \ f_i \in \mathcal{H}_i, \ i = 0, 1, 2.$$

Yuqoridagi kabi aniqlangan $\mathcal{A}_\mu$ operatorli matrisa $\mathcal{H}$ Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.

Quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema 1. Istalgan $\mu > 0$ soni uchun $\mathcal{A}_\mu$ operatorli matrisa muhim spektridan tashqarida yotuvchi ko‘pi bilan to‘rtta oddiy xos qiymatlarga ega.

Adabiyotlar

1. Tretter C. Spectral theory of block operator matrices and applications. Imperial College Press, 2008.

PANJARADAGI UCH ZARRACHALI SISTEMA HAMILTONIANI MUHIM SPEKTRINING TARMOQLARI HAQIDA

Umirqulova G. H.
Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston,
g.h.umirqulova@buxdu.uz

Uch zarrachali diskret Shryodinger operatorlari [1] va uch zarrachali sistemaga mos model operatorlarining muhim spektrlari ko‘plab ishlarda o‘rganilgan. Muhim spektrni o‘rganishda odatda Veyl mezoni, Fredgolmning analitik teoremasi va Faddeyev tenglamasi ishlatiladi. Ushbu maqolada d o‘lchamli panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos Hamiltonianning muhim spektri tarmoqlarini tashkil qiluvchi kesmalar soni tahlil qilingan.

$\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ natural soni uchun $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} :\equiv (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ orqali d-o‘lchamli torni belgilaymiz. $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ to‘plamda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatni qabul qiluvchi) simmetrik funksiyalarning Hilbert fazosi bo‘lgan $L^2_{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ fazoda

$$H^{(\gamma)}_{\mu,\lambda} := H^{(\gamma)}_0 - \mu(V_1 + V_2) - \lambda V_3 \tag{1}$$

tenglik orqali aniqlanuvchi Hamiltonianni qaraymiz. Bunda $\mu, \lambda, \gamma > 0$ ta’sirlashish parametrlari, $H^{(\gamma)}_0$ qo‘zg‘almas operator $E_\gamma(\cdot,\cdot)$ funksiyaga ko‘paytirish operatori:

$$(H^{(\gamma)}_0 f)(x,y) = E_\gamma(x,y)f(x,y);$$

$$E_\gamma(x,y) := \varepsilon(x) + \varepsilon(y) + \gamma\varepsilon(x+y), \quad \varepsilon(x) := \sum_{k=1}^{\mathrm{d}}(1-\cos(nx_k)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

V_α, $\alpha = 1,2,3$ operatorlar esa lokal bo‘lmagan potensial operatorlari bo‘lib, quyidagi ko‘rinishdagi xususiy integralli operatorlardir:

$$(V_1 f)(x,y) = v(y)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f(x,t)dt, \ (V_2 f)(x,y) = v(x)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t)f(t,y)dt,$$

$$(V_3 f)(x,y) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f(t, x+y-t)dt.$$

V_α, $\alpha = 1,2$ operatorlar yadrosida ishtirok etuvchi $v(\cdot)$ funksiya $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ torda aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya.

(1) tenglik yordamida ta’sir qiluvchi $H^{(\gamma)}_{\mu,\lambda}$ Hamiltonian $L^2_{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operatordir.

Teorema 1. Istalgan $\mu, \lambda, \gamma > 0$ sonlari uchun $H^{(\gamma)}_{\mu,\lambda}$ Hamiltonianning muhim spektri ko‘pi bilan 3 ta kesmalar birlashmasidan iborat. Bunda muhim spektrning uch zarrachali tarmog‘i bitta kesmadan, ikki zarrachali tarmog‘i esa ko‘pi bilan ikkita kesmalar birlashmasidan iborat bo‘ladi.

Adabiyotlar

1. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schroedinger operators on lattices. Math. Nachr., 280:7 (2007), pp. 699–716.